

*Б. Н. Грудин, Б.Е. Ламаш, В. С. Плотников, Н. А. Смольянинов*

## **ОЦЕНИВАНИЕ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ОБЛАЧНОГО ПОКРОВА**

*B.N. Grudin, B.E. Lamash, V.S. Plotnikov, N.A. Smolyaninov.*

## **ESTIMATION OF FRACTAL DIMENSION OF CLOUD COVER**

*Предложены алгоритмы оценивания фрактальной размерности облачного покрова по космическим снимкам. Для смоделированных изображений предложены фрактальные меры в пространственной области, которые, как и интегральная частотная характеристика, инвариантны относительно мультипликативных уменьшений масштаба. Разработанные алгоритмы могут применяться для параметризации, нелинейной фильтрации и восстановления изображений облачного покрова.*

*Ключевые слова: Фрактальная размерность, облачный покров, ортогональные преобразования*

*Algorithms estimating the fractal dimension of cloud cover on satellite images are proposed. For the model images, fractal measures in a spatial region are proposed, which, similarly to the integral frequency characteristic, are invariant under multiplicative reduction in scale. Developed algorithms can be used for parameterization, nonlinear filtering and reconstruction of images of cloud cover.*

*Key words: Fractal dimension, cloud cover, orthogonal transformations*

### **Введение**

Оптические характеристики облаков являются случайными скалярными полями, во-первых, из-за стохастической геометрии облачного покрова (нерегулярная причудливая форма очертаний, количество, размеры и положение в пространстве отдельных облаков), во-вторых, из-за макромасштабных флуктуаций водности облаков. Известно, что облачный покров в большинстве случаев фрактален. К фрактальным случайным полям относятся недифференцируемые поля, у которых спектральная плотность убывает по степенному закону [1]. Если процесс фрактальный и вложен в евклидово пространство с размерностью  $d_0$ , то он будет иметь размерность [1]

$$d = d_0 + (3 - \beta) / 2, \quad \beta \in (1, 3), \quad d \in (1, 3), \quad (1)$$

где  $\beta$  — показатель степени спада энергетического спектра соответствующего одномерного сечения процесса.

В работе [9] В. Mandelbrot предложил обобщенную модель фрактального броуновского движения. В рамках этой модели статистически изотропные недифференцируемые поля, для которых нет выделенных пространственных масштабов, также могут иметь спектр фрактального вида. При этом фрактальная размерность поля  $d = d_0 + 1 - H$ , где  $H$  — показатель Херста ( $0 < H < 1$ ). Очевидно, что для таких полей  $\beta = 2H + 1$ . Моделью обобщенного броуновского движения с фрактальным спектром могут быть описаны многие реальные двумерные случайные поля облачного покрова [1,2].

Фрактальные облака обычно меньше отражают, чем плоскопараллельные облака, которые имеют такое же количество жидкой воды, и, соответственно, фрактальные облака содержат большее количество жидкой воды, чем плоскопараллельные облака, которые имеют тот же самый коэффициент отражения. Фрактальные облака обеспечивают связь между локальными измерениями, сделанными в реальных облаках, и идеализированными плоскопараллельными облаками, которые используются в крупномасштабных моделях. Показатель степени спада  $\beta$  (или фрактальная размерность) оптической толщины является одним из основных параметров, определяющих горизонтальный перенос радиации: с возрастанием  $\beta$  горизонтальный перенос уменьшается [3].

Обычно для параметризации облачного покрова по фрактальной размерности используется метод Ричардсона, согласно которому периметр облака и его площадь связаны степенной зависимостью, показатель которой определяется фрактальной размерностью [1,2,4]. Однако на практике достаточно сложно определить периметр границы облачного покрова, которая может представлять собой многосвязанную область. Целью данной работы является разработка метода оценивания фрактальной размерности облачного покрова непосредственно по космическим изображениям без выделения границ облаков.

### **Моделирование изображений облачного покрова с фрактальными характеристиками**

Пусть функция  $f(x,y)$  представляет собой распределение яркости непрерывного изображения облачного покрова, а  $F(u_1,u_2)$  и  $E(u_1,u_2) = |F(u_1,u_2)|^2$  соответственно фурье-образ и энергетический спектр изображения  $f(x,y)$ ,  $(x,y)$  — декартовы координаты в плоскости изображения,  $(u_1,u_2)$  — пространственные частоты. В полярной системе координат интегрирование энергетического спектра по углу в плоскости пространственных частот дает интегральную частотную характеристику (ИЧХ), инвариантную относительно сдвига и вращения исходного изображения [5,6]. Энергетический спектр дискретного изображения  $f(j_1,j_2)$  обозначим как  $E(m,n) = |F(m,n)|^2$ , а в полярной системе координат дискретные представления энергетического спектра и ИЧХ запишем в виде  $E(u,\theta)$  и  $V(u)$  соответственно, где  $(j_1,j_2)$  — дискретные отсчеты изображения,  $(m,n)$  — дискретные отсчеты пространственного спектра,  $u = (m^2 + n^2)^{1/2}$ ,  $\theta = \arctg(n/m)$ . Для фрактальных изображений облачного покрова ИЧХ  $V(u)$  будет убывать по степенному закону, т.е.  $V(u) = u^{-\beta}$ . По ИЧХ  $V(u)$  можно оценить фрактальную размерность.

В большинстве случаев изображение можно считать фрактальным только в некоторой ограниченной области пространственных частот. Если интервал фрактальности включает пространственные частоты из диапазона  $[u_a, u_b]$ , то соответствующее значение  $\beta$  с использованием ИЧХ находим по формуле:

$$\beta = [\log V(u_a) - \log V(u_b)] / [\log u_a - \log u_b]. \quad (2)$$

Для однородных и изотропных стохастических полей с нулевым средним каждое значение ИЧХ  $V(u)$  можно трактовать как дисперсию случайного поля. Тогда соотношение (2) может быть записано в виде:

$$\beta = (\log D_a - \log D_b) / (\log m_b - \log m_a), \quad (3)$$

где  $D_a = V(u_a)$ ,  $D_b = V(u_b)$  – дисперсии стохастических полей масштабов  $m_a$  и  $m_b$  соответственно.

Масштаб в данном случае определяется отношением размера изображения к номеру гармоники, соответствующей данному отсчету ИЧХ. Вычисленная с использованием соотношений (1) и (3) фрактальная размерность, называется дисперсионной [7].

Запишем ДПФ цифрового изображения  $f(j_1, j_2)$  в виде

$$F(m, n) = A(m, n) \exp[i\phi(m, n)]. \quad (4)$$

Чисто фазовое ДПФ  $Z(m, n)$  соответствует случаю, когда  $A(m, n) = 1$ , т.е.

$$Z(m, n) = \exp[i\phi(m, n)]. \quad (5)$$

Для фрактальных изображений энергетический спектр является изотропным и убывает с ростом пространственной частоты по степенному закону. Однако можно смоделировать изображения, энергетический спектр которых не является изотропным, но ИЧХ убывает по степенному закону. Такие изображения мы будем называть изображениями с фрактальными ИЧХ [8].

Для моделирования изображений  $f_1(j_1, j_2)$  с ИЧХ, убывающей по степенному закону, используем соотношение [8]:

$$f_1(j_1, j_2) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(m, n) B(m, n) \exp\left[i \frac{2\pi}{N} (mj_1 + nj_2)\right], \quad (6)$$

где  $F(m, n)$  – ДПФ изображения  $f(j_1, j_2)$ ,  $B(m, n) = C(m, n) / V^{1/2}(m, n)$ ,  $C(m, n) = 1 / (m^2 + n^2)^{\beta/2}$  – степенная дискретная функция.

При такой обработке сохраняется информация об анизотропии исходного энергетического спектра. Синтезированное по алгоритму (6) изображение можно рассматривать как результат нелинейной ВЧ, либо НЧ фильтрации исходного изображения [8]. При увеличении значений  $\beta$  ВЧ фильтрация переходит в НЧ фильтрацию. ИЧХ  $V(u)$  синтезированных изображений является инвариантом относительно мультипликативных уменьшений масштаба в области пространственных частот, а также сдвигов и поворотов исходного изображения. Для выбора  $\beta$  можно использовать множество самых различных критериев, начиная от комфортного психофизического восприятия смоделированного изображения и заканчивая различными критериями оптимальности. При моделировании изображений по формуле (6) инвариантом является функция анизотропности пространственного спектра  $\gamma(u) = I_{\max}(u) / \langle I(u) \rangle$ , где  $I_{\max}(u)$  – максимальное значение энергетического спектра при заданном  $u$ , а  $\langle I(u) \rangle$  – среднее значение.

Для моделирования больших по информационной емкости изображений с фрактальными характеристиками вместо ДПФ во многих случаях предпочтительнее использовать другие ортогональные преобразования с действительным ядром, позволяющие сократить время расчетов и увеличить размеры изображений. В результате прямого ортогонального преобразования с действительным ядром  $T(j_1, j_2; m, n)$  изо-

бражение  $f(j_1, j_2)$  преобразуется в матрицу  $F_T(m, n)$  [5] того же размера с элементами, которые запишем в виде аналогичном выражению (4):

$$F_T(m, n) = A_T(m, n) \operatorname{sgn}[F_T(m, n)], \quad (7)$$

где  $A_T(m, n) = |F(m, n)|$ ,  $(m, n) = 0, 1, \dots, N - 1$  — отсчеты ортогонального преобразования.

Аналогом выражения (6) при моделировании изображений с фрактальными характеристиками на основе обобщенной пространственно-частотной фильтрации будет выражение [8]

$$f_1(j_1, j_2) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} A_T(m, n) B_T(m, n) \operatorname{sgn}[F_T(m, n)] T^{-1}(j_1, j_2; m, n), \quad (8)$$

где  $T^{-1}(j_1, j_2; m, n)$  — ядро обратного ортогонального преобразования;

$B_T(m, n) = C(m, n) / V_T^{1/2}(\sqrt{m^2 + n^2})$ ;  $V_T(u)$  — аналог ИЧХ для соответствующего ортогонального преобразования в плоскости обобщенных частот.

Выделим следующие ортогональные преобразования, для которых существуют быстрые алгоритмы: дискретное косинусное преобразование  $F_C(m, n_2)$  (ДКП), дискретное преобразование Хартли  $F_H(m, n)$  (ДПХ) и  $Q$  — преобразование  $F_Q(m, n)$  [5,6]. Для преобразования Хартли и  $Q$  — преобразования  $V_Q(u) = V_H(u) = V(u)$  [6], и результаты синтеза фрактальных изображений по формуле (8) практически совпадают с результатами, получаемые с использованием выражения (6).

### Оценивание фрактальной размерности облачного покрова по космическим снимкам

На рис. 1 показан космический снимок облачного покрова. Размер изображения (266×266) км,  $(N \times N) = (1024 \times 1024)$ . В левом верхнем углу показан спектр Фурье изображения, который является анизотропным. Использовать метод Ричардсона для оценивания фрактальной размерности облачного покрова, визуализированного на данном изображении, практически невозможно.

На рис. 2 показана зависимость  $\log_2 V$  от  $\log_2 k$ , где  $k$  — номер кольцевой зоны ИЧХ для исходного изображения (кривая  $I$ ). Зависимость  $I$  показывает, что на высоких частотах изображение не является фрактальным, поскольку исходная кривая сильно сглажена на пределе разрешения в системе визуализации космического снимка. В результате преобразования исходного изображения  $f(j_1, j_2)$  по формуле (6) при различных значениях  $\beta$  получаем серию изображений  $f_1(j_1, j_2)$  со степенными ИЧХ. Оптимальное изображение моделировалось в соответствии с критерием минимума среднеквадратического расстояния  $\rho(f, f_1) = \sqrt{M[(f(j_1, j_2) - f_1(j_1, j_2))^2]}$ , где  $M$  — оператор усреднения [9]. В нашем случае расстояние  $\rho(j_1, j_2)$  между исходным изображением и смоделированным не превышает 0,011 при  $\beta = 2,8$  (прямая 2),  $d = 2,6$ ,  $H = 0,4$ . На рис. 3 показано контрастированное оптимальное изображение  $f_1(j_1, j_2)$ , для которого ИЧХ в двойном логарифмическом масштабе также является прямой и  $\beta = 2,8$ . Важно отметить, что данная технология оценивания фрактальной размерности не зависит от контраста обрабатываемого изображения, а следовательно, и от условий освещения при визуализации облачного покрова.

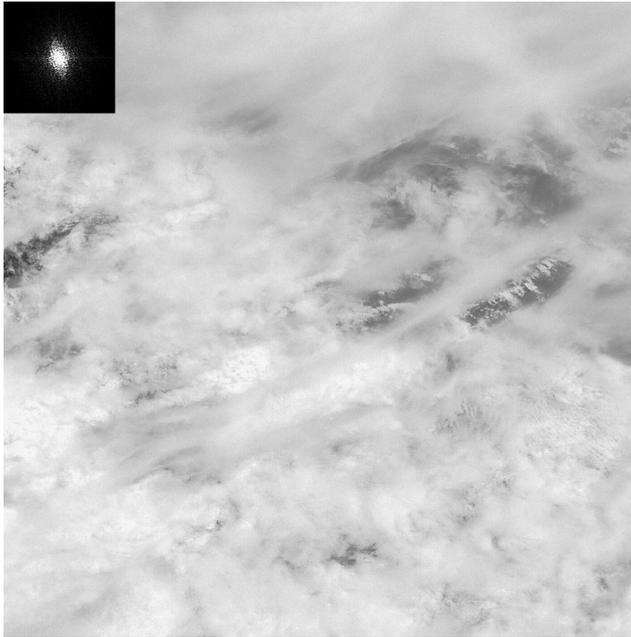


Рис. 1. Изображение облачного покрова

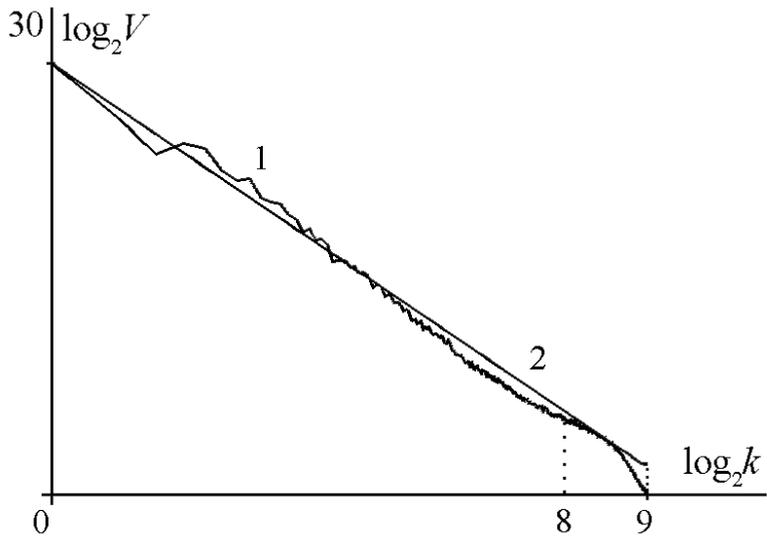


Рис. 2. ИЧХ облачного покрова в двойном логарифмическом масштабе

Исходя из соотношения (3), можно предположить, что и в пространственной области для фрактальных изображений логарифм отношения дисперсий изображе-

ний на двух соседних масштабах также должен сохраняться [8], т.е. для изображений облачного покрова с фрактальными ИЧХ должны существовать фрактальные меры, инвариантные относительно мультипликативных изменений масштаба. Пусть  $g_1(j_1, j_2)$  и  $g_2(j_1, j_2)$  – дискретные изображения одного размера, полученные при уменьшении масштаба исходного изображения  $g(j_1, j_2)$ , но изображение  $g_2(j_1, j_2)$  дополнительно сглажено низкочастотным фильтром. Изображения  $g_1(j_1, j_2)$  и  $g_2(j_1, j_2)$  разобьем на  $M$  одинаковых достаточно малых областей, содержащих, например,  $(2 \times 2)$  или  $(3 \times 3)$  отсчета, и вычислим в этих областях соответствующие локальные дисперсии  $D_{1i}$  и  $D_{2i}$ , где  $i$  – номер области. Построим фрактальную меру, которая для случая уменьшения масштаба при сглаживании изображения  $g_2(j_1, j_2)$  в два раза (относительно масштаба изображения  $g_1(j_1, j_2)$ ) имеет вид:

$$L_D = \log_2 \left( \frac{\sum_{i=1}^M D_{1i}}{\sum_{i=1}^M D_{2i}} \right) \quad (9)$$

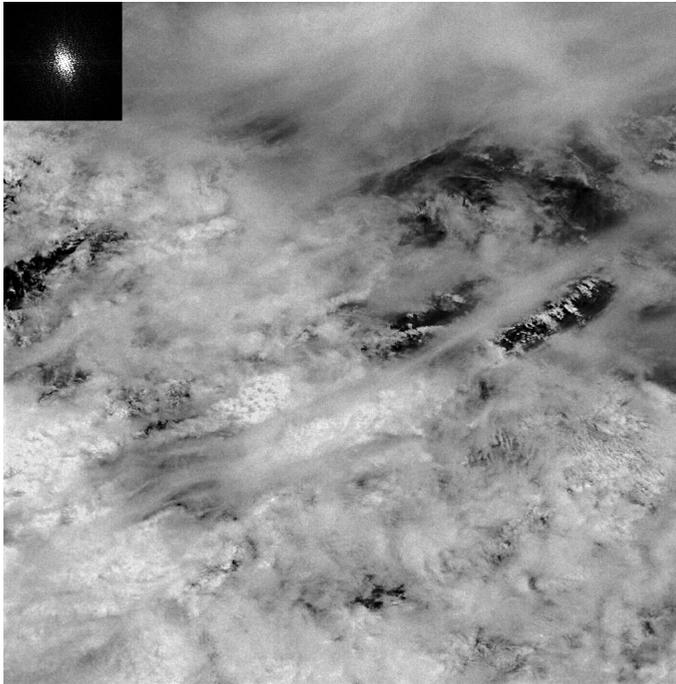


Рис. 3. Изображение облачного покрова с фрактальной ИЧХ

Инвариантность этой меры относительно кратных уменьшений масштаба устанавливалась следующим образом. Моделировались стохастические фрактальные изображения со степенным энергетическим спектром при различных значениях  $\beta \in (1, 3)$  с использованием методов и алгоритмов, изложенных в работе [10]. Для смоделированных изображений строились их уменьшенные аналоги  $g_p$  ( $P = N/l$ ,  $l = 1, 2, 4, 8, \dots$ ) за счет обрезания соответствующей высокочастотной октавы их

фурье-образов. Каждое из полученных изображений  $g_p$  в свою очередь подвергалось сглаживанию низкочастотным фильтром с единичным коэффициентом передачи [5]. Сглаживающее окно имело размер (3×3) элемента, что примерно соответствует уменьшению масштаба вдвое.

Для каждого масштаба  $P$  вычислялась фрактальная мера  $L_D(P)$  вида (9) и фрактальная размерность  $d=2+(3-\beta)/2$ . Моделированием на ЭВМ установлено, что для  $P \geq 32$  и  $\beta \in (1,3)$  при заданном значении  $\beta$  мера  $L_D(P)$  остается практически неизменной. Например, при  $\beta = 2$   $L_D(P) = 2,789 \pm 0,015$ . При значениях  $P \leq 16$  инвариантность меры (9) относительно дальнейших уменьшений масштаба для фрактальных изображений нарушается, поскольку статистические характеристики при таких размерах выборки становятся неустойчивыми. Зависимость между  $\beta$  и  $L_D(P)$  хорошо аппроксимируется степенной функцией:

$$\beta \approx -0,0564L_D^2(P) - 0,6378L_D(P) + 4,2036. \quad (10)$$

Аналогично можно построить другую меру (триангуляционную [7]), которая для случая уменьшения масштаба в два раза имеет вид:

$$L_r = \log_2 \left( \frac{\sum_{i=1}^M (S_{1i} - 1)}{\sum_{i=1}^M (S_{2i} - 1)} \right), \quad (11)$$

где  $S_{1i}$  и  $S_{2i}$  — локальные площади областей, содержащих по 4 ближайших элемента, соответственно для несглаженного изображения и изображения сглаженного низкочастотным фильтром с единичным коэффициентом передачи;  $i$  — номер области;  $M$  — число областей.

Как и для меры (9), установлена инвариантность меры (11) относительно кратных уменьшений масштаба для  $P \geq 32$  и  $\beta \in (1,3)$ . Зависимость между  $\beta$  и  $L_D(P)$  хорошо аппроксимируется степенной функцией

$$\beta \approx -0,0612L_r^2(P) - 0,5598L_r(P) + 4,185. \quad (12)$$

Для преобразованных по алгоритмам (6) и (8) изображений рассмотренные выше меры также инвариантны относительно кратномасштабных уменьшений масштаба. Так, для изображения, представленного на рис. 3, среднеквадратическое отклонение от заданных при моделировании и вычисленных с использованием соотношений (10) и (12) значений  $\beta$  не превышает 0,05, в то время как для исходного изображения  $1,72 \leq \beta \leq 3,1$ . При увеличении числа отсчетов и для статистически более однородных изображений меры (10), (12) становятся значительно более устойчивыми. Для цифровых изображений облачного покрова с размерами, например  $(N \times N) = (32\,768 \times 32\,768)$  отсчетов вместо ДПФ можно использовать косинусное преобразование, для которого разработаны алгоритмы, позволяющие осуществлять данное преобразование значительно быстрее, чем вычисляется преобразование Фурье, при существенно меньшем требуемом для вычислений объеме памяти и практическом отсутствии краевых эффектов в процедуре циклической фильтрации [6].

## Заключение

На основе обобщенной пространственно-частотной фильтрации разработаны алгоритмы синтеза космических снимков облачного покрова с фрактальными характеристиками, инвариантными относительно мультипликативных уменьшений масштаба. Синтезированные изображения обладают максимальным сходством с исходными изображениями за счет сохранения фазы- либо знака амплитуды соответствующего ортогонального преобразования. Это позволяет оценить с высокой точностью фрактальную размерность облачного покрова без выделения границ облаков. Разработанные методы и алгоритмы позволяют осуществлять нелинейную фильтрацию, а в некоторых случаях и восстановление изображений. При этом ИЧХ спектров отфильтрованных и восстановленных изображений не зависят от особенностей частотной характеристики системы визуализации и контраста исходных изображений. Применение графических процессоров GPGPU с архитектурой NVIDIA (технология CUDA) [11] позволило нам значительно увеличить производительность вычислений и соответственно обработать большой массив космических снимков облачного покрова, полученных в том числе и с высоким разрешением. Установлено, что с вероятностью 75 % наблюдается выпадение осадков, если фрактальная размерность облачного покрова примерно равна 2,65. Сильные осадки наблюдаются при фрактальной размерности облачного покрова большей 2,76.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007 – 2013 годы» (госконтракт № 16.515.12.5005).

## Литература

1. Грудин Б.Н., Плотников В.С., Кисленок Е.Г., Фищенко В.К. Анализ, фильтрация и декомпозиция микроскопических изображений на основе ортогональных преобразований // Автометрия, 2007, т. 43, № 1, с. 24-36.
2. Грудин Б.Н., Плотников В.С., Смольянинов Н.А. Моделирование изображений с заданными фрактальными характеристиками // Автометрия, 2010, т. 46, № 3, с. 215-221.
3. Плешанов В.С., Напряшкин А.А., Кибиткин В.В. Особенности применения теории фракталов в задачах анализа изображений // Автометрия, 2010, т. 46, № 1, с. 86-96.
4. Потапов А.А., Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Пахомов А.А., Герман В.А. Новейшие методы обработки изображений. – М.: Физматлит, 2008. – 496 с.
5. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. т. 1, 2. – М.: Мир, 1982.
6. Пустовалов Е.В., Войтенко О.В., Грудин Б.Н., Плотников В.С. Графические процессоры в задачах электронной томографии // Автометрия, 2012, т. 48, № 1, с. 72-79.
7. Розанов Ю. А. Случайные процессы. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
8. Hayakawa M., Nakamura T., Iudin D., Michimoto K., Suzuki T., Hanada T., Shimura T. On the fine structure of thunderstorms leading to the generation of sprites and elves: Fractal analysis // Geophys. Res. Letters, 2005, v. 110. D06104.
9. Mandelbrot B.B. Fractals Form, Chance and Dimension. San-Francisco: W.H. Freeman and Company, 1977. – 365 p.
10. Schroder M.R. Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from The Infinite Paradise // Freeman. New York, 1991. – 528 p.
11. Zhexian Luo, Chongjian Liu A validation of the fractal dimension of cloud boundaries // Geophys. Res. Letters, 2007, v. 34. L03808.