

М.Ю.Белевич

О ТЕРМОДИНАМИКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

M. Yu. Belevich

ON THERMODYNAMICS OF THE VISCOUS FLUID

Рассматривается построение неравновесной термодинамики вязкой жидкости без привлечения гипотезы локального термодинамического равновесия. Теория основывается на причинно-обусловленной механике вязкой теплопроводящей жидкости, включающей первое начало термодинамики в качестве теоремы. Обсуждаются условия применимости второго начала термодинамики и проблема диссипации кинетической энергии. Основные выводы иллюстрируются примерами из численного анализа.

Ключевые слова: неравновесная термодинамика, механика жидкости, законы сохранения, причинность.

The development of the non-equilibrium thermodynamics without local equilibrium hypothesis is considered. The theory is based on the causal mechanics of the viscous heat conducting fluid, which includes the 1st law of thermodynamics as a theorem. The conditions of applicability of the second law of thermodynamics and the dissipation of the kinetic energy problem are discussed. Main conclusions are illustrated using examples from the numerical analysis.

Key words: non-equilibrium thermodynamics, fluid mechanics, conservation laws, causality.

1. Введение

В основе стандартной модели вязкой жидкости лежат две разные теории. Первая описывает движение жидкости под действием механических сил. Она включает два интегральных закона: закон сохранения массы и закон движения Коши (континуальный аналог второго закона Ньютона). Из этих законов следует система дифференциальных уравнений в частных производных, моделирующая эволюцию плотности массы и скорость точки среды в терминах тензора напряжения и плотности массовых сил.

Вторая теория, в соответствии с замыслом, призвана описывать эволюцию характеристик среды под действием термических факторов. Однако в классическом случае фундаментальные законы, которые могли бы быть положены в основу такого описания, отсутствуют. Имеется набор законов термостатики (или так называемой равновесной термодинамики), которые распространяются на общий неравновесный случай с помо-

шью гипотезы локального термодинамического равновесия. Это допущение позволяет применять результаты равновесной термодинамики и в общем случае. Для преодоления ограничений, накладываемых гипотезой локального равновесия, были разработаны специальные модификации классической термодинамики (см., например, [12–14]).

Помимо упомянутых расширений классической термодинамики существует другой путь построения термодинамической теории, применимой в неравновесном случае. Он был получен при построении причинно-обусловленной модели жидкости, предложенной и развитой в работах [4,6,7], и допускает естественное рассмотрение термодинамических эффектов, не требуя привлечения ни законов равновесной термодинамики, ни гипотезы локального термодинамического равновесия. В то время как в основе стандартной модели жидкости, помимо постулатов механики, лежит постулат о сохранении полной энергии, в причинно-обусловленной модели это утверждение рассматривается как теорема. По этой причине построение причинно-зависимой теории не нуждается в постулировании первого начала термодинамики и принятии гипотезы локального равновесия.

Цель данной работы состоит в демонстрации возможности построения термодинамики, основанной на причинно-обусловленной точке зрения. Она организована следующим образом. Раздел 2 содержит краткое описание причинно-обусловленной модели вязкой жидкости. Баланс энергии в причинной модели и его сравнение с балансом энергии классических моделей жидкости (идеальной и вязкой) представлен в разделе 3. Раздел 4 посвящен обсуждению второго начала термодинамики. Заключительные замечания приводятся в разделе 5.

2. Причинно-обусловленная модель жидкости

2.1. Время и конфигурация

Будем рассматривать наблюдаемый объект \mathcal{B} как множество в топологическом пространстве. Это означает, что гипотеза сплошности считается принятой, и каждый объект \mathcal{B} мыслится как бесконечно делимое множество точек, любые две из которых имеют непересекающиеся окрестности.

Каждой точке тела ставится в соответствие ее мировая линия в пространстве событий — четырехмерном пространственно-временном континууме \mathcal{W} . Совокупность мировых линий точек тела образует мировую трубку тела \mathcal{B} — четырехмерное многообразие \mathcal{B}^4 в пространстве \mathcal{W} .

Каждая мировая линия может быть гладко параметризована вещественным параметром. Параметризация неоднозначна, и для того чтобы сузить выбор, можно использовать дополнительные требования к этой процедуре. Воспользуемся таким требованием, целью которого будет замена бесконечного набора параметров мировых линий единственным параметром t . Выделим одну мировую линию, и ее параметризацию оставим произвольной. Для удобства будем называть ее *мировой линией наблюдателя*, а ее параметр t — *временем*. Все остальные параметры синхронизируем с временем наблюдателя. В приложениях метод синхронизации обычно выбирается так, что он может быть интерпретирован в терминах скорости сигнала, используемого для наблюдений. Фазовую скорость такого сигнала далее будем обозначать через c .

Синхронизация позволяет определить пространства одновременных событий \mathcal{W}_t . Одновременное сечение \mathcal{B}_t мировой трубки тела \mathcal{B}^4 называется *конфигурацией* тела в момент времени t . Различные наблюдатели порождают различные пространства одновременных событий и, значит, различные конфигурации тела в один и тот же момент времени. Изучается множество образов \mathcal{B}_t диффеоморфных отображений тела \mathcal{B} в пространство \mathcal{W} . В физических приложениях удобно связывать эти отображения с наблюдениями и описывать их в терминах сигнала, использованного для наблюдений (см., например, [14]).

2.2. Законы сохранения

Как было показано в [4,6,7], меру \mathcal{M} тела \mathcal{B} можно интерпретировать, как минимум, двояко: как массу тела и как его энергию. В свою очередь, это приводит к двоякой интерпретации закона сохранения меры, индуцированной на конфигурации тела \mathcal{B}_t (сечении мировой трубки тела \mathcal{B} пространством одновременных событий). Так, этот закон можно понимать как закон сохранения массы m конфигурации \mathcal{B}_t

$$d_t m(\mathcal{B}_t) = 0, \quad (1)$$

либо как закон сохранения энергии Cm конфигурации. Другими словами, если можно выбрать константу C так, что для произвольной конфигурации \mathcal{B}_t равенство $\frac{Cm(\mathcal{B}_t)}{C} = m(\mathcal{B}_t)$ всегда выполняется, уравнение

$$d_t Cm(\mathcal{B}_t) = 0. \quad (2)$$

следует из уравнения (1). Можно показать, что такой выбор всегда возможен (см. детали в [7]). При достаточно общих допущениях уравнения (1) и (2) приводят к следующим дифференциальным законам сохранения:

$$\operatorname{div}(\rho_m \vec{\tau}) = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div}(\kappa_{Cm} \vec{\tau}) = 0, \quad (3)$$

где $\vec{\tau} = d_t$ — вектор, касательный к мировой линии в некоторой точке, а ρ_m и κ_{Cm} суть плотности массы и энергии в той же точке, соответственно. Меры, определенные на конфигурации и соответствующие им плотности связаны соотношениями:

$$m(\mathcal{B}_t) = \int_{V(\mathcal{B}_t)} \rho_m dV, \quad Cm(\mathcal{B}_t) = \int_{V(\mathcal{B}_t)} \kappa_{Cm} dV \quad \Rightarrow \quad \kappa_{Cm} = C\rho.$$

Здесь $V(\mathcal{B}_t)$ — объем конфигурации тела.

Поскольку по определению κ_{Cm} равно $\frac{1}{2}|\vec{\tau}|^2 \rho_m = C\rho_m$, имеем $C = \frac{1}{2}|\vec{\tau}|^2$. Надлежащим выбором метрического тензора g можно достичь равенства величины $|\vec{\tau}|^2 = g(\vec{\tau}, \vec{\tau})$ константе $|\vec{\tau}| = \text{const}$. В случае ортогонального базиса метрический тензор диагонален и в отдельных случаях пропорционален единичному тензору I с коэффициентом пропорциональности g_0 : $g = g_0 I$. В частности, удобно выбирать тензор g исходя из условия $|\vec{\tau}| = 1$. В этом случае $g_0 = \frac{1}{|\vec{\tau}, \vec{\tau}|}$ и $\kappa_{Cm} = \frac{1}{2}\rho_m$.

Если существуют источники Σ_m и Σ_{Cm} мер m и Cm соответственно, тогда законы сохранения (1) и (2) записываются в виде:

$$d_t m(\mathcal{B}_t) = \Sigma_m \quad \text{и} \quad d_t Cm(\mathcal{B}_t) = \Sigma_{Cm}. \quad (4)$$

Если под m понимается масса, тогда обычно считается $\Sigma_m = 0$. Напротив, если Cm интерпретируется как энергия, тогда величина $\Sigma_{Cm} \neq 0$ понимается как источник энергии $\Sigma_{Cm} = Q$.

2.3. Осреднение

Гипотеза сплошности, как уже было сказано, считается принятой. Движение, далее, разделяется по масштабам и осредняется, и изучается так называемый термодинамический случай. Энергия снабжается дополнительной структурой путем замены конгруэнции мировых линий точек тела конгруэнцией осредненных (сглаженных) мировых линий. Оператор осреднения, представляющий собой непрерывный линейный проектор, отображает множество несглаженных объектов на множество осредненных [3]. Введение процедуры осреднения (см. обсуждение этой процедуры в [5,8]) делит мировые линии на две части: гладкие осредненные кривые и пульсации. Соответствующее касательное векторное поле $\vec{\tau}$ также разделяется на осредненное векторное поле \vec{v} , векторы которого касаются сглаженных мировых линий, и пульсационное векторное поле $\vec{\tau}'$:

$$\vec{\tau} = \vec{v} + \vec{\tau}'.$$

При этом дифференциальный закон сохранения массы (первое уравнение (3)) приводит в общем случае к *уравнению диффузии плотности массы*, которое следует рассматривать как обобщение четырехмерного уравнения неразрывности:

$$0 = \overline{\text{div}(\rho_m(\vec{v} + \vec{\tau}'))} = \text{div}(\rho\vec{v}) - \text{div}(\sigma g^{-1}(\nabla\rho)). \quad (5)$$

Надчеркивание здесь и далее означает осреднение. Величина σ — коэффициент диффузии плотности массы, а ρ (в отличие от ρ_m) обозначает плотность массы, соответствующую полю осредненной скорости при учете диффузионного потока массы. Если $\sigma = \text{const}$, имеем

$$\text{div}(\rho\vec{v}) = \sigma \square \rho, \quad (6)$$

где \square — оператор Даламбера. В стандартном случае правой частью всегда пренебрегают, при этом уравнение превращается в *четырёхмерное уравнение неразрывности*

$$\text{div}(\rho\vec{v}) = 0. \quad (7)$$

Далее для простоты будем рассматривать только этот случай. Однако надо иметь в виду, что такое допущение (т. е. $\sigma = 0$) в некоторых задачах может приводить к затруднениям (детали и пример см. в [7]).

В свою очередь, энергия (теперь называемая *полной энергией*) делится на так называемую *кинетическую энергию* $K(\mathcal{B}_t)$ конфигурации тела и ее *внутреннюю энергию* $E(\mathcal{B}_t)$

$$C_m(B_t) = K(B_t) + E(B_t), \quad K, E > 0$$

с плотностями

$$\kappa \equiv \frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2, \quad \varepsilon \equiv \frac{1}{2} \rho (|\vec{\tau}|^2 - |\vec{v}|^2) \quad (8)$$

соответственно. Закон сохранения энергии (2) теперь может быть записан как закон сохранения полной энергии

$$d_t(K + E) = d_t \int_V (\kappa + \varepsilon) dV = 0. \quad (9)$$

или

$$d_t(K + E) = Q \quad (10)$$

в случае ненулевого источника внутренней энергии Q .

Интегральное соотношение (9) соответствует дифференциальному закону сохранения полной энергии

$$0 = \overline{\text{div}(\kappa_{C_m}(\vec{v} + \vec{\tau}'))} = \text{div}((\kappa + \varepsilon)\vec{v}). \quad (11)$$

Такое же соотношение можно получить из уравнения (7), если его умножить на $\frac{1}{2} |\vec{\tau}|^2 = \frac{\kappa + \varepsilon}{\rho} \equiv \frac{1}{2}$. Кроме того,

$$d_t \frac{\kappa + \varepsilon}{\rho} = 0. \quad (12)$$

Следует иметь в виду, что метрический коэффициент g_0 теперь записывается в виде $g_0 = \frac{1 - \varepsilon}{\rho(\vec{v}, \vec{v})}$.

Интегральный закон (10), в свою очередь, соответствует дифференциальному закону

$$d_t \frac{\kappa + \varepsilon}{\rho} = \rho q, \quad (13)$$

где ρq — приток внутренней энергии.

Далее для простоты мы будем рассматривать только случай $Q = 0$. Из тех же соображений не рассматривается потенциальная энергия. Однако ее учет не представляет трудностей (обсуждение этого вопроса см. в [6,7]).

2.4. Баланс импульса и внутренней энергии

Тензор $\mathbf{M} = \rho \vec{v} \otimes \vec{v}$ называется четырехмерным тензором *плотности потока импульса*. В терминах этого тензора можно переписать уравнение (11). С этой целью определим так называемую *систему отсчета наблюдателя*, т. е. отображение $\phi^t: \mathcal{W} \rightarrow i\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3$, где $i\mathbb{R}^1$ обозначает пространство мнимых чисел. Это отображение снабжает каждую точку \mathcal{W} четверкой чисел $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ — координатами точки. Предполагается, что $dx^0 = icdt$, где $i = \sqrt{-1}$, а c — скорость сигнала (см. п. 2.1). Далее, компоненты векторов будут рассматриваться относительно

координатного базиса $\{\vec{e}_\alpha\}_{\alpha=0}^3$, $\vec{e}_\alpha = \partial_{x^\alpha}$, выбранного в каждой точке \mathcal{W} . Используется правило суммирования по повторяющемуся индексу, и считается, что латинские индексы изменяются от 1 до 3, а греческие — от 0 до 3.

Теперь, полагая $\vec{v} = v^\alpha \vec{e}_\alpha$, где $v^0 = ic$, величину $\rho d_t \frac{\kappa}{\rho}$ можно записать в терминах компонент скорости:

$$\rho d_t \frac{\kappa}{\rho} = \rho v^\alpha \left(\frac{\kappa}{\rho} \right)_{,\alpha} = \rho v^\alpha \frac{1}{2} (\mathbf{g}_{\beta\gamma} v^\gamma v^\beta)_{,\alpha} = \rho v^\alpha \mathbf{g}_{\beta\gamma} v^\gamma v^\beta_{;\alpha}.$$

Последнее уравнение с помощью уравнения неразрывности (7) можно переписать в виде:

$$\rho d_t \frac{\kappa}{\rho} = \mathbf{g}_{\beta\gamma} v^\gamma (\rho v^\alpha v^\beta)_{;\alpha} = \mathbf{g}(\vec{v}, \text{div} \mathbf{M}).$$

Уравнение

$$\text{div} \mathbf{M} = \text{div} \mathbf{T}, \tag{14}$$

где \mathbf{T} называется *тензором напряжений*, постулируется. Тензор \mathbf{T} полагается симметричным, но иногда рассматривается и несимметричный тензор [1]. Уравнение (14) известно как *уравнение баланса импульса* или *уравнение движения*. Комбинируя (14) и (13), можно получить уравнение баланса внутренней энергии:

$$\rho d_t \frac{\varepsilon}{\rho} = -\mathbf{g}(\vec{v}, \text{div} \mathbf{T}). \tag{15}$$

Уравнения (7), (14) и (15), вместе с надлежащим определением тензора \mathbf{T} , замкнутые с помощью некоторого дополнительного соотношения (уравнения состояния), образуют систему уравнений причинно-обусловленной механики жидкости. Структура четырехмерного тензора \mathbf{T} выбирается по аналогии с его трехмерным аналогом и основывается на используемой физической интерпретации.

3. Баланс энергии

Скорость изменения полной энергии вдоль мировой линии (или полная производная по времени) равна нулю:

$$0 = \rho d_t \frac{\kappa}{\rho} + \rho d_t \frac{\varepsilon}{\rho} = \underbrace{\left(\rho d_t \frac{\kappa}{\rho} - \mathbf{g}(\vec{v}, \text{div} \mathbf{T}) \right)}_{=0} + \underbrace{\left(\rho d_t \frac{\varepsilon}{\rho} + \mathbf{g}(\vec{v}, \text{div} \mathbf{T}) \right)}_{=0}. \tag{16}$$

Здесь оба слагаемых образуют уравнения баланса плотностей кинетической и внутренней энергий соответственно:

$$\rho d_t \frac{\kappa}{\rho} = \mathbf{g}(\vec{v}, \text{div} \mathbf{T}), \tag{17}$$

$$\rho d_t \frac{\varepsilon}{\rho} = -\mathbf{g}(\vec{v}, \text{div} \mathbf{T}). \tag{18}$$

3.1. Уравнение баланса внутренней энергии

3.1.1. Идеальная жидкость

В простейшем случае тензор напряжений \mathbb{T} типа $\binom{2}{0}$ полагается пропорциональным метрическому тензору

$$\mathbb{T} = \pi \mathbf{g}^{-1}, \tag{19}$$

Геометрическая интерпретация коэффициента π как скалярной кривизны пространства-времени обсуждалась в [6]. Модель континуума, включающая это определение тензора напряжений, называется *идеальной*.

Рассмотрим теперь баланс внутренней энергии (т. е. вторую группу членов в (16)) идеальной жидкости

$$\rho d_t \frac{\varepsilon}{\rho} + \mathbf{g}(\vec{v}, \operatorname{div} \mathbb{T}) = \rho d_t \frac{\varepsilon}{\rho} + d_t \pi = 0.$$

Выбирая $\mathbf{g} = g_0 \mathbb{I}$ и вводя обозначения

$$\begin{aligned} e &= g_0^{-1} \varepsilon, \\ p &= -g_0^{-1} \pi \end{aligned} \tag{20}$$

для плотности внутренней энергии e и давления p соответственно, это уравнение можно записать в виде:

$$\rho d_t \frac{e}{\rho} = d_t p. \tag{21}$$

3.1.2. Вязкая жидкость

Другой вариант определения тензора напряжений включает поправочный член пропорциональный (с коэффициентом χ) симметричной части градиента скорости $\nabla \vec{v}$, т. е. тензору \mathbb{D} , который называется *тензором скоростей деформации*:

$$\mathbb{T} = \pi \mathbf{g}^{-1} + 2\chi \mathbb{D}. \tag{22}$$

Такая модель среды называется *вязкой*.

Правую часть уравнения баланса энергии можно вычислить в два этапа. Сначала рассмотрим $\operatorname{div} \mathbb{T}$:

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \mathbb{T})^\alpha &= \mathbb{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = (\pi g^{\alpha\beta})_{;\beta} + 2(\rho\chi D^{\alpha\beta})_{;\beta} \\ &= \pi_{;\beta} g^{\alpha\beta} + (\rho\chi (v^{\alpha;\beta} + v^{\beta;\alpha}))_{;\beta}. \end{aligned}$$

Далее, выражение в правой части записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\vec{v}, \operatorname{div} \mathbb{T}) &= v_\alpha (\operatorname{div} \mathbb{T})^\alpha \\ &= v^\beta \pi_{;\beta} + v_\alpha (\rho\chi (v^{\alpha;\beta} + v^{\beta;\alpha}))_{;\beta} \\ &= d_t \pi + 2(\rho\chi v_\alpha D^{\alpha\beta})_{;\beta} - 2\rho\chi v_{\alpha;\beta} D^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое равно

$$2\rho\chi v_{\alpha;\beta} D^{\alpha\beta} = \rho\chi D_{\alpha\beta} D^{\alpha\beta} = \rho\chi D : D,$$

где $D : D$ — скалярное произведение двух тензоров. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} g(\vec{v}, \operatorname{div} T) &= d_t \pi + g(\vec{v}, \operatorname{div}(2\rho\chi D)) \\ &= d_t \pi + \operatorname{div}(2\rho\chi D(g(\vec{v}))) - 2\rho\chi D : D, \end{aligned} \quad (23)$$

и уравнение (18) теперь записывается, как

$$\rho d_t \frac{\varepsilon}{\rho} = -d_t \pi - \operatorname{div}(2\rho\chi D(g(\vec{v}))) + 2\rho\chi D : D. \quad (24)$$

Если $\mathbf{g} = g_0 \mathbf{l}$, то это уравнение переписывается так:

$$\begin{aligned} \rho d_t \frac{\varepsilon}{\rho} &= -d_t \pi - \operatorname{div}(2\rho\chi D(g(\vec{v}))) + 2\rho\chi D : D \\ &= -d_t \pi - 2(\rho\chi v_{\alpha} D^{\alpha\beta})_{;\beta} + 2\rho\chi v_{\alpha;\beta} D^{\alpha\beta} \\ &= g_0 (d_t p - 2(\mu v_{\alpha} D^{\alpha\beta})_{;\beta} + 2\mu D_{\alpha\beta} D^{\alpha\beta}). \end{aligned}$$

Используя обозначение $\mu = g_0^{-1} \rho\chi$ для коэффициента динамической вязкости и формулы (20), последнее уравнение запишется в виде:

$$\rho d_t \frac{e}{\rho} = d_t p - 2(\mu v_{\alpha} D^{\alpha\beta})_{;\beta} + 2\mu D : D. \quad (25)$$

3.2. Сравнение со стандартной теорией; локальное термодинамическое равновесие

В стандартном случае закон сохранения полной энергии постулируется. Изначально он формулируется как первое начало равновесной термодинамики. Понятие равновесия требует, в свою очередь, введения функции состояния T , называемой *температурой*, что формализуется в виде нулевого начала термодинамики. Этот закон утверждает, что равновесие двух термодинамических систем означает равенство их температур.

Использование закона сохранения полной энергии в рамках нестационарной дифференциальной модели среды требует принятия так называемой *гипотезы локального термодинамического равновесия*, т. е. равновесия в физически бесконечно малом объеме. Эта гипотеза оказалась очень плодотворной в необратимой термодинамике.

В сформулированной выше причинно-обусловленной модели жидкости необходимость в классической термодинамике и ее приспособлении к неравновесному случаю отсутствует. Это объясняется тем, что закон сохранения полной энергии в причинно-обусловленной модели является теоремой и не требует постулирования, как в классической теории. Таким образом, потребность в гипотезе локального равновесия утрачивается. Причинно-зависимое уравнение баланса внутренней энергии отличается от классического, и это отличие позволяет

формализовать классические допущения. Сравнение стандартного уравнения баланса внутренней энергии с классическим пределом ($c \rightarrow \infty$) соответствующего причинно-обусловленного уравнения позволяет найти, к чему приводит применение гипотезы локального равновесия.

3.2.1. Идеальная жидкость

Стандартное уравнение баланса плотности внутренней энергии e_3 (первое начало термодинамики) идеальной жидкости записывается в виде:

$$\rho d_t \frac{e_3}{\rho} = \frac{p_3}{\rho} d_t \rho. \quad (26)$$

Соответствующее причинно-обусловленное уравнение (21) в классическом пределе ($c \rightarrow \infty$) выглядит следующим образом:

$$\rho d_t \frac{e_3}{\rho} = d_t p_3 = \frac{p_3}{\rho} d_t \rho + \rho d_t \frac{p_3}{\rho}. \quad (27)$$

Здесь в обоих уравнениях использованы обозначения $e_3 = \lim_{c \rightarrow \infty} e$ и $p_3 = \lim_{c \rightarrow \infty} p$. Легко видеть, что уравнение (27) отличается от уравнения (26), в котором предполагается локальное равновесие, слагаемым $\rho d_t \frac{p_3}{\rho}$. Оба уравнения совпадают в случае $d_t \frac{p}{\rho} = 0$. Это равенство следует рассматривать, как математическое выражение гипотезы локального термодинамического равновесия в случае идеальной жидкости. Действительно, если уравнение состояния записывается в виде $p_3 = \rho R T$, где R — универсальная газовая постоянная, тогда отношение $\frac{p_3}{\rho}$ равно RT и

$$d_t \frac{p}{\rho} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \text{const.}$$

Предположение о локальном равновесии допустимо лишь для медленно протекающих процессов. В отсутствии термодинамического равновесия (например, при изучении затухания звуковых волн в жидкостях) эти уравнения обычно модифицируют, вводя корректирующие слагаемые, учитывающие процессы нарушения и восстановления равновесия [2]. Уравнение (26) есть частный случай более общих уравнений баланса внутренней энергии (21) и (27).

3.2.2. Вязкая жидкость

В случае вязкой жидкости стандартное уравнение баланса плотности внутренней энергии имеет вид:

$$\rho d_t \frac{e_3}{\rho} = \frac{p_3}{\rho} d_t \rho + 2\mu D_3 : D_3.$$

Здесь D_3 — стандартный трехмерный тензор скоростей деформации. В причинно-обусловленном случае аналогичное уравнение (25) в классическом пределе ($c \rightarrow \infty$) записывается так:

$$\begin{aligned} \rho d_t \frac{\epsilon_3}{\rho} &= d_t p_3 - 2v_j (\mu D_3^{jk})_{;k} \\ &= \frac{p_3}{\rho} d_t \rho + \left(\rho d_t \frac{p_3}{\rho} - 2(\mu v_j D_3^{jk})_{;k} \right) + 2\mu D_3 : D_3. \end{aligned}$$

Оба уравнения совпадают, если второе слагаемое в последнем уравнении равно нулю. Иными словами, равенство

$$\rho d_t \frac{p_3}{\rho} - 2(\mu v_j D_3^{jk})_{;k} = 0$$

означает, что имеет место локальное термодинамическое равновесие в вязкой жидкости.

3.3. Диссипация кинетической энергии

В стандартной теории слагаемое $\text{diss}_3 \equiv 2\mu D_3 : D_3$, называемое *плотностью диссипации кинетической энергии*, знакоопределенно. В причинно-обусловленной модели жидкости знак аналогичного слагаемого

$$\text{diss} \equiv 2\rho\chi D : D = 2\rho\chi D^{\alpha\beta} D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\rho\chi (g^{\alpha\gamma} v_{;\gamma}^{\beta} + g^{\beta\gamma} v_{;\gamma}^{\alpha}) (g_{\alpha\kappa} v_{;\beta}^{\kappa} + g_{\beta\kappa} v_{;\alpha}^{\kappa})$$

определяется знаками выражений в скобках. В случае, когда $g^{\alpha\beta} = g_0^{-1} \delta^{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta} = g_0 \delta_{\alpha\beta}$, плотность диссипации имеет вид:

$$\text{diss} = \frac{1}{2}\mu (v_{;\alpha}^{\beta} + v_{;\beta}^{\alpha})^2. \quad (28)$$

Поскольку коэффициент динамической вязкости $\mu = g_0^{-1} \rho\chi$ положителен, множитель χ и метрический коэффициент $g_0 = \frac{1-\epsilon}{|(\vec{v}, \vec{v})|}$ должны быть одного знака. Знак метрического коэффициента определяется его знаменателем, так как числитель положителен по определению. Для покоящейся или сравнительно медленно движущейся жидкости знак метрического коэффициента отрицателен, и знак χ также отрицателен. Иными словами, множитель μ положителен, когда $\sum_j (v^j)^2 < c^2$, а плотность диссипации (правая часть (28)) положительна, если выражения в скобках вещественны.

Скорость изменения кинетической энергии сечения мировой трубки имеет вид:

$$\begin{aligned} d_t K &= \int_{V(\mathcal{B}_t)} \rho d_t \frac{\kappa}{\rho} dV \\ &= \int_{V(\mathcal{B}_t)} d_t \pi dV + \int_{V(\mathcal{B}_t)} \text{div} (2\rho\chi D(g(\vec{v}))) dV - \text{Diss}, \end{aligned}$$

где $\text{Diss} \equiv \int_{V(\mathcal{B}_t)} 2\rho\chi D : D dV$. Первое слагаемое в правой части описывает изменение K за счет сжимаемости среды, второе слагаемое описывает изменение K за счет потока через границу сечения мировой трубки, а третье — «диссипация» кинетической энергии.

тической энергии сечения мировой трубки. Так как $v^0 = ic$, некоторые слагаемые в выражении для «диссипации» отрицательны и, следовательно, в некоторых особых случаях «диссипация» может превращаться в «антидиссипацию».

4. Второе начало термодинамики в общем случае

4.1. Определения температуры и энергии

Теперь можно дать определения температуры T и плотности энтропии s , которые применимы в общем неравновесном случае и не требуют привлечения гипотезы локального равновесия. Температура может быть определена с помощью соотношения $d_t \frac{e}{\rho} = c_p dT$, где c_p — удельная теплоемкость среды при постоянном давлении. Подставив это определение в уравнение (25), найдем

$$\rho c_p d_t T = d_t p - 2(\mu v_\alpha D^{\alpha\beta})_{;\beta} + 2\mu D : D,$$

или в отсутствие среднего движения

$$\rho c_p \partial_t T = \partial_t p.$$

Если имеется ненулевой источник тепла, а перенос тепла описывается законом Фурье, последнее уравнение принимает вид четырехмерного уравнения теплопроводности:

$$\rho c_p \partial_t T = \partial_t p + (\lambda T_{;\beta})_{;\gamma} \delta^{\gamma\beta}. \quad (29)$$

Здесь λ — коэффициент теплопроводности. Это уравнение второго порядка является гиперболическим, так как содержит вторую производную по времени, «правильный» знак которой определяется мнимой нулевой координатой.

Плотность энтропии определяется с помощью соотношения Гиббса (см., например, [11])

$$T \rho d_t \frac{s}{\rho} \equiv \rho d_t \frac{e}{\rho} - d_t p = g_0^{-1} \left(\rho d_t \frac{\varepsilon}{\rho} + d_t \pi \right). \quad (30)$$

Для идеальной жидкости это выражение равно нулю. Для вязкой жидкости уравнение баланса внутренней энергии дает

$$\rho d_t \frac{\varepsilon}{\rho} + d_t \pi + g(\vec{v}, 2\rho\chi \operatorname{div} D) = g_0 T \rho d_t \frac{s}{\rho} + g(\vec{v}, 2\rho\chi \operatorname{div} D) = 0. \quad (31)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} T \rho d_t \frac{s}{\rho} &= -g(\vec{v}, 2\mu \operatorname{div} D) = -\operatorname{div}(2\mu D(g(\vec{v}))) + 2\mu D : D \\ &= -2\mu(v_\alpha D^{\alpha\beta})_{;\beta} + \frac{1}{2}\mu(v_{;\alpha}^\beta + v_{;\beta}^\alpha)^2, \end{aligned}$$

или

$$\rho d_t \frac{s}{\rho} = \operatorname{div}(s\vec{v}) = -\frac{2\mu}{T}(v_\alpha D^{\alpha\beta})_{;\beta} + \frac{1}{T} \operatorname{diss}.$$

4.2. Второе начало термодинамики

Скорость изменения энтропии S сечения \mathcal{B}_t дается выражением

$$d_t S = \int_{V(\mathcal{B}_t)} \operatorname{div}(s\vec{v})dV = - \int_{V(\mathcal{B}_t)} \frac{2\mu}{T} (v_\alpha D^{\alpha\beta})_{;\beta} dV + \frac{1}{2} \int_{V(\mathcal{B}_t)} \frac{\mu}{T} (v_{;\alpha}^\beta + v_{;\beta}^\alpha)^2 dV.$$

Если интегральный поток через границу равен нулю, тогда $d_t S = \frac{1}{2} \int_{V(\mathcal{B}_t)} \frac{\mu}{T} \mathbf{D} : \mathbf{D} dV$, и знак $d_t S$ определяется знаком скалярного произведения $\mathbf{D} : \mathbf{D}$. Изучим это скалярное произведение, для чего выделим в матрице \mathbf{D} вещественные и мнимые блоки:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2v_{;0}^0 & \begin{pmatrix} v_{;k}^0 + v_{;0}^k \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v_{;j}^0 + v_{;0}^j \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} v_{;k}^j + v_{;j}^k \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Блоки, стоящие на главной диагонали, вещественны, остальные — мнимые. Используя соотношение $\mathbf{D} : \mathbf{D} = \operatorname{tr}(\mathbf{D}^2)$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{D} : \mathbf{D} &= \underbrace{\left(2v_{;0}^0\right)^2}_{\operatorname{Re}} + 2 \sum_k \underbrace{\left(v_{;k}^0 + v_{;0}^k\right)^2}_{\operatorname{Im}} + \sum_{j,k} \underbrace{\left(v_{;k}^j + v_{;j}^k\right)^2}_{\operatorname{Re}} \\ &= \underbrace{\left(2v_{;0}^0\right)^2}_{\operatorname{Re}} - 2 \sum_k \underbrace{\left(iv_{;k}^0 + iv_{;0}^k\right)^2}_{\operatorname{Re}} + \sum_{j,k} \underbrace{\left(v_{;k}^j + v_{;j}^k\right)^2}_{\operatorname{Re}}. \end{aligned}$$

В соответствии со вторым началом термодинамики $d_t S > 0$. Стандартная теория удовлетворяет этому принципу, поскольку при $c \rightarrow \infty$ только последнее сугубо положительное слагаемое в $\mathbf{D} : \mathbf{D}$ отлично от нуля. В причинно-обусловленном случае имеется две возможности:

1) стандартная — второе начало выполняется:

$$2 \sum_k \left(iv_{;k}^0 + iv_{;0}^k\right)^2 < \left(2v_{;0}^0\right)^2 + \sum_{j,k} \left(v_{;k}^j + v_{;j}^k\right)^2. \quad (32)$$

2) нестандартное — второе начало не выполняется:

$$2 \sum_k \left(iv_{;k}^0 + iv_{;0}^k\right)^2 \geq \left(2v_{;0}^0\right)^2 + \sum_{j,k} \left(v_{;k}^j + v_{;j}^k\right)^2.$$

Для того чтобы выяснить смысл этих двух возможностей, рассмотрим частный случай $c = \operatorname{const}$, используя так называемые нормальные координаты (см., например, [17]). Они выбираются для простоты, поскольку в этом случае ковариантные производные локально равны частным. При этом неравенство (32) приводится к виду

$$\begin{aligned} 0 &> 2 \sum_k \underbrace{\left(i \partial_k v^0 + i \partial_0 v^k\right)^2}_{=0} - \underbrace{\left(2 \partial_0 v^0\right)^2}_{=0} - \sum_{j,k} \left(\partial_k v^j + \partial_j v^k\right)^2 \\ &= 2 \sum_k \left(\frac{1}{c} \partial_t v^k\right)^2 - \sum_{j,k} \left(\partial_k v^j + \partial_j v^k\right)^2. \end{aligned}$$

Вращая систему координат так, чтобы в координатном базисе две компоненты вектора скорости обратились в нуль $\vec{v} = (ic, u, 0, 0)$, находим необходимое условие применимости второго начала термодинамики:

$$\left(\frac{1}{c}\partial_t u\right)^2 < 2(\partial_x u)^2 \Rightarrow c^2 > \frac{1}{2}\left(\frac{\partial_t u}{\partial_x u}\right)^2. \quad (33)$$

Когда неравенство (33) выполняется, стандартное второе начало выполняется, диссипация приводит к потерям кинетической энергии, а энтропия замкнутой системы возрастает. В противном случае скорость сигнала, используемого для наблюдений, слишком мала, сигнал не подходит для переноса информации об объекте и должен быть заменен более быстрым.

5. Заключительные замечания

Об определениях

Причинно-обусловленная теория не требует привлечения гипотезы локального термодинамического равновесия. Тем не менее такие понятия, как температура и плотность энтропии могут быть определены (см. п. 4.1 и формулу (30)). Они были построены по аналогии со стандартными так, чтобы не менялась исходная идея: энтропия идеальной жидкости сохраняется во времени. Однако определение энтропии отличается от классического, что обусловлено разницей в уравнениях баланса внутренней энергии (см. п. 3.2). В то время как стандартное уравнение получено с помощью гипотезы локального термодинамического равновесия, причинное уравнение от нее не зависит.

Диссипация кинетической энергии в рамках причинно-обусловленной теории утрачивает свою знакоопределенность (положительность). Условие, определяющее знак диссипативного слагаемого, зависит от скорости сигнала и тем самым определяет те явления, которые не могут быть изучены с помощью выбранного сигнала. Это условие можно рассматривать как критерий для выбора скорости сигнала, если в распоряжении наблюдателя имеется достаточное число сигналов. Такой выбор действительно делается в численном анализе дифференциальных уравнений.

Второе начало термодинамики и численная неустойчивость

Гидромеханика, основанная на гипотезе сплошности, заменяет дискретное множество жидких частиц континуумом точек. Численные процедуры, применяемые к гидромеханическим проблемам, возвращают нас обратно к дискретному случаю и, в свою очередь, заменяют непрерывное пространство-время конечным набором пространственно-временных узлов (здесь мы рассматриваем только конечно-разностный подход). Несмотря на то, что реальные наблюдения осуществляются с помощью звуковых или световых сигналов, а модель среды формально не запрещает произвольной скорости сигнала, стандартная теория неявно использует лишь сигналы с бесконечной скоростью.

Дискретные модели жидкости, напротив, допускают произвольную скорость сигнала, которая либо бесконечна (неявные модели), либо равна отношению шагов

сетки и может непрерывно меняться в широких пределах (явные модели). Анализ устойчивости таких моделей (см., например, [16]), как и практические вычисления, показывают, что если скорость сигнала выбрана слишком малой, т. е. меньше возможных скоростей жидкости, наблюдения (здесь это означает — вычисления) рисуют ошибочную картину движения жидкости. Иначе говоря, стандартная интерпретация подобных наблюдений, неявно встроенная в модель, приводит к ошибочному представлению течения.

Ясно, что явные численные алгоритмы, рассматриваемые как наблюдения движения жидкости (здесь — решения уравнений модели), подобны фактическим наблюдениям реальных жидкостей, тогда как неявные алгоритмы соответствуют стандартной теоретической гидромеханике с ее бесконечной скоростью сигнала.

В качестве иллюстрации того, что было сказано, рассмотрим еще раз трехмерное уравнение баланса плотности кинетической энергии:

$$\partial_t k_3 + \operatorname{div}(k_3 \vec{u}) = -(\vec{u}, \nabla p) + g(\vec{u}, \operatorname{div}(2\mu D_3)).$$

Будем считать для простоты, что $\vec{u} = (u, 0, 0)$, а $p, \mu = \text{const}$. В случае $\frac{k_3}{\rho} = \frac{1}{2}u^2$, тензор D_3 имеет единственную отличную от нуля компоненту

$$D_3 = \begin{pmatrix} \partial_x u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а предыдущее уравнение приводится к виду (здесь $\nu = \frac{\mu}{\rho}$)

$$\begin{aligned} \partial_t \frac{k_3}{\rho} + u \partial_x \frac{k_3}{\rho} &= 2\nu u \partial_{xx} u = \\ &= 2\nu \partial_{xx} \frac{k_3}{\rho} - 2\nu (\partial_x u)^2. \end{aligned} \quad (34)$$

Последнее слагаемое в правой части этого уравнения описывает диссипацию кинетической энергии. Оно, очевидно, всегда положительно. Однако численный аналог этого уравнения (например, конечно-разностный) демонстрирует иное поведение диссипативного слагаемого.

Рассмотрим уравнение (34), записанное в терминах компонент скорости и линеаризованное в окрестности некоторого произвольного узла сетки, скажем (n, j) , ассоциируемого с пространственно-временной точкой (t^n, x_j) :

$$u (\partial_t u + U \partial_x u - 2\nu \partial_{xx} u) = 0. \quad (35)$$

Здесь U — некоторая постоянная средняя скорость. Пусть двумерная пространственно-временная сетка равномерна с шагом по времени Δt и пространственным шагом Δx . Простая явная двуслойная конечно-разностная аппроксимация уравнения (35) имеет вид:

$$u_j^n \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + U \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - 2\nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) = 0. \quad (36)$$

Два временных слоя используются для аппроксимации производной по времени, а пространственная производная аппроксимируется трехточечной центрально-разностной формулой. Раскладывая $u_{j\pm 1}^{n+1}$ в ряды Тейлора относительно точки (t^n, x_j) с точностью до $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$, получаем первое дифференциальное приближение разностного уравнения (36):

$$u_j^n \left(\partial_t u_j^n + \frac{\Delta t}{2} \partial_{tt} u_j^n \right) + u_j^n U \partial_x u_j^n - 2\nu u_j^n \partial_{xx} u_j^n = 0.$$

Опуская индексы, перепишем это соотношение в терминах удельной плотности кинетической энергии $\frac{k_3}{\rho}$:

$$\begin{aligned} \partial_t \frac{k_3}{\rho} + U \partial_x \frac{k_3}{\rho} &= -\frac{\Delta t}{2} u \partial_{tt} u + 2\nu u \partial_{xx} u = \\ &= \left(-\frac{\Delta t}{2} \partial_{tt} \frac{k_3}{\rho} + 2\nu \partial_{xx} \frac{k_3}{\rho} \right) - \\ &\quad - \left(-\frac{\Delta t}{2} (\partial_t u)^2 + 2\nu (\partial_x u)^2 \right). \end{aligned} \quad (37)$$

По сравнению с исходным уравнением (34) или его линеаризацией (35) первое дифференциальное приближение (37) содержит новое слагаемое:

$$-\frac{\Delta t}{2} u \partial_{tt} u = -\frac{\Delta t}{2} \partial_{tt} \frac{k_3}{\rho} + \frac{\Delta t}{2} (\partial_t u)^2,$$

которое меняет тип дифференциального уравнения: причинно-необусловленное параболическое уравнение (35) становится гиперболическим и причинно-обусловленным. Это значит, что причинно-необусловленная задача, решаемая численно посредством явного алгоритма, фактически заменяется причинно-обусловленной. Величина $c_{ph} \equiv \pm \sqrt{\frac{2\nu}{\Delta t}}$ с размерностью скорости обычно интерпретируется как фазовая скорость распространения возмущений (волн). Анализ устойчивости конечно-разностной схемы (36) показывает (см., например, [15]), что эта скорость должна удовлетворять хорошо известному условию устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви $|c_{ph}| \leq c_{max}$, где $c_{max} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}$ есть предельная скорость, зависящая только от свойств сетки. Напротив, фазовая скорость не зависит от сетки, и в случае $|c_{ph}| > c_{max}$ сетка не в состоянии правильно передать всю необходимую информацию. Мы интерпретируем эту предельную скорость c_{max} как скорость сигнала, которая используется наблюдателем (здесь процессором) для исследования (построения) движения жидкости (т. е. решения). Если предельная скорость меньше фазовой скорости, последняя интерпретируется ошибочно и это приводит к взрыву численного решения.

Более того, диссипативный член $diss = -\frac{\Delta t}{2} (\partial_t u)^2 + 2\nu (\partial_x u)^2$ утрачивает свою безусловную положительность. Эта величина будет положительной (второе начало выполняется), если

$$\frac{\Delta t}{2\nu} (\partial_t u)^2 < 2 (\partial_x u)^2 \quad \Rightarrow \quad c_{\max}^2 \geq c_{\text{ph}}^2 > \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_t u}{\partial_x u} \right)^2.$$

В противном случае, численный аналог второго начала не имеет места, и дискретная модель оказывается неспособной воспроизводить движение реальной жидкости (ср. этот хорошо известный результат с неравенством (33), которое связывает скорость сигнала и скорость среды с применимостью второго начала термодинамики).

Необратимость

Согласно [9], понятие «энтропия» введено специально для того, чтобы различать процессы двух типов — обратимые и необратимые. Считается, что производство энтропии отсутствует в обратимых процессах и всегда положительно в остальных случаях. Такое требование часто кладется в основу конструируемых теорий (см., например, [8]). С этой точки зрения свойство процесса быть (не)обратимым является абсолютным, и значение производства энтропии позволяет обнаружить это свойство.

Соображения, представленные в п.4.2, демонстрируют возможность иной точки зрения. Мы рассматриваем (не)обратимость как относительное свойство, которое зависит не только от изучаемого явления, но также и от самого процесса наблюдения. Судя по всему, никто не проводил термодинамических экспериментов, пользуясь сигналами, отличными от света. Чрезвычайно большое значение скорости света порождает ощущение, что учет наблюдателя и самого наблюдения является излишним.

Однако существуют случаи, когда включение наблюдателя в рассмотрение необходимо. Это, например, случай относительно медленных сигналов, используемых для наблюдений, например звук. Скорость сигнала определяет нижнюю границу масштабов осреднения. Те явления, чьи пространственно-временные масштабы меньше, чем у сигнала (длина волны и период), фактически неразрешимы. Понятно, что такие границы для скорости звука, например, существенно больше, чем для светового сигнала.

Включение в теорию процесса наблюдения допускает новую интерпретацию природы необратимости. Действительно, любое наблюдение устанавливает соответствие между событием (точкой пространственно-временного континуума) и точкой мировой линии наблюдателя. Фактически, все множество одновременных событий проектируется на одну точку мировой линии. Поскольку целью наблюдений служит построение описания объекта, являющегося подмножеством пространства одновременных событий, приходится констатировать, что практически вся информация об объекте, как и самом пространстве событий, является для наблюдателя недоступной (или утраченной). Хорошей иллюстрацией сказанному может служить радио- или эхолокационные наблюдения: в каждый момент времени только одно событие оказывается видимым на экране локатора. Остальная часть экрана либо остается темной, либо воспроизводит прошедшие события. Создавая описание объекта, наблюдатель вынужден реконструировать отсутствующую информацию, пользуясь различными интерполяционными процедурами. Это приводит к неустраняемым ошибкам, обычно называемым необратимостью.

Литература

1. *Даньшина А.В., Карлин Л.Н., Чанцев В.Ю.* Несимметричность напряжений вязкой несжимаемой жидкости. / Ученые записки РГГМУ, 2011, № 20, с. 141-151.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. — М.: УРСС, 2006.
3. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Ч.1. — М.: Физматгиз, 1965.
4. *Belevich M.* Causal description of non-relativistic dissipative fluid motion // Acta Mechanica. 2003. Vol. 161. Pp. 65–80.
5. *Belevich M.* Causal description of heat and mass transfer // J. Phys. A: Math. Gen. 2004. Vol. 37, no. 8. Pp. 3053–3069.
6. *Belevich M.* Relationship between standard and causal fluid models // Acta Mechanica. 2005. Vol. 180. Pp. 83–106.
7. *Belevich M.* Non-relativistic abstract continuum mechanics and its possible physical interpretations // J. Phys. A: Math. Theor. 2008. Vol. 41. 045401 doi:10.1088/1751-8113/41/4/045401.
8. *Belevich M.* On the continuity equation // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. Vol. 42. 375502 doi:10.1088/1751-8113/42/37/375502.
9. *Elze H.-T., Rafelski J., Turko L.* Entropy production in relativistic hydrodynamics // Phys. Lett. B. 2001. Vol. 506. Pp. 123–130.
10. *Glansdorff P., Prigogine I.* Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations. London, New York: Wiley-Interscience, 1971. (В пер.: *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973).
11. *Gyarmati I.* Non-equilibrium Thermodynamics. Field Theory and Variational Principles. New York: Springer, 1970. (В пер.: *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика.— М.: Мир, 1974).
12. *Jou D., Casas-Vázquez J., Lebon G.* Extended irreversible thermodynamics // Rep. Prog. Phys. 1988. Vol. 51. Pp. 1105–1179. (В пер.: *Жоу Д., Касас-Васкес Х., Лебон Дж.* Расширенная необратимая термодинамика.— Изд.: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2006).
13. *Jou D., Casas-Vázquez J., Lebon G.* Extended irreversible thermodynamics revisited: 1988–1998 // Rep. Prog. Phys. 1999. Vol. 62. Pp. 1035–1114.
14. *Müller I., Ruggeri T.* Extended thermodynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
15. *Pauli W.* Theory of relativity. New York: Pergamon, 1958. (В пер.: *Паули В.* Теория относительности.— М.: Наука, 1991).
16. *Roach P.* Computational Fluid Dynamics. Albuquerque: Hermosa Publishers, 1976. (В пер.: *Роуч П.* Вычислительная гидромеханика.— М.: Мир, 1980.).
17. *Schutz B. F.* Geometrical methods of mathematical physics. Cambridge: Cambridge University Press, 1980. (В пер.: *Шутц Б.* Геометрические методы математической физики.— М.: Мир, 1984).