

*В.С. Девятков*

**ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ДЕТАЛИЗАЦИЯ ФРАКТАЛЬНОЙ  
РАЗМЕРНОСТИ РЕЧНОГО СТОКА НА ТЕРРИТОРИИ  
СЕВЕРО-ЗАПАДНОГО РЕГИОНА РОССИИ**

*V.S. Devyatov*

**SPATIAL DETAILED ELABORATION OF FRACTAL DIMENSION  
OF A RIVER FLOW IN TERRITORY OF NORTH-WEST REGION  
IN RUSSIA**

*Построены графики зависимостей фрактальной размерности рядов наблюдений за суточными и осредненными за многолетний период расходами воды от площадей водосборов для Северо-Западного региона. Проведен сравнительный анализ полученных графиков с редуccionными кривыми.*

*Ключевые слова: фрактальная размерность, редуccionные кривые, фрактальная диагностика, прогнозирование.*

*Graphs of dependences fractal dimension of daily and averaged over many years rows observations of water flow from the catchment area for the North-West region are constructed. Comparative analysis of the charts with a reduction curves carried out.*

*Key words: fractal dimension, reduction curves, fractal diagnostics, forecasting.*

**Введение (мотивация и постановка задачи исследований)**

Водные объекты подвержены закономерным изменениям режима поверхностных и подземных вод, происходящим по отдельным географическим (природным) зонам, поскольку речной сток в первую очередь зависит от климатических факторов. Это явление в гидрологии получило название зональность гидрологического режима водных объектов.

Реки, водный режим которых отражает типичные черты многолетних колебаний стока, свойственные данной географической зоне, называются реками с зональным режимом формирования стока. К таким рекам обычно относятся средние и частично малые реки.

Реки, водный режим которых заметно отличается от зонального вследствие влияния местных факторов или особенностей (наличие озер, болот, карста и пр.), и его характер оказывается нетипичным для рек данной географической зоны, называются реками с азональным режимом формирования стока. Этот режим свойствен малым рекам, но может проявляться и на части средних.

Если водный режим рек формируется под влиянием особенностей двух и более географических зон и имеет сложный характер, то такие реки называются реками с полизональным режимом стока. Он обычно наблюдается на больших реках.

В зависимости от рассматриваемой гидрологической характеристики стока в категорию рек с зональным режимом попадают реки, имеющие различные размеры водосбора. Этот факт устанавливается по графикам связи модуля стока с площадью водосбора. Кривые, отраженные на этих графиках, получили название редуccionных.

Целью данной статьи является оценка зависимости фрактальной размерности рядов наблюдений за суточными и осредненными за многолетний период расходами воды от площадей водосборов для Северо-Западного региона. Установление подобных зависимостей актуально с точки зрения краткосрочного прогнозирования водного режима и частично инфинитной гидрологии [1], в которой разработана методология моделирования и прогнозирования статистически неустойчивых процессов с использованием фрактального диагностирования [2, 3].

Для достижения цели были решены следующие задачи:

- проведена фрактальная диагностика рядов суточного и многолетнего речного стока и получены их фрактальные размерности;
- построены графики зависимостей полученных фрактальных размерностей от площадей водосборов;
- проведен сравнительный анализ полученных данных.

### Методика исследования

В современной гидрологии широко используются редукционные кривые зависимостей модуля стока от площадей водосбора (рис. 1).

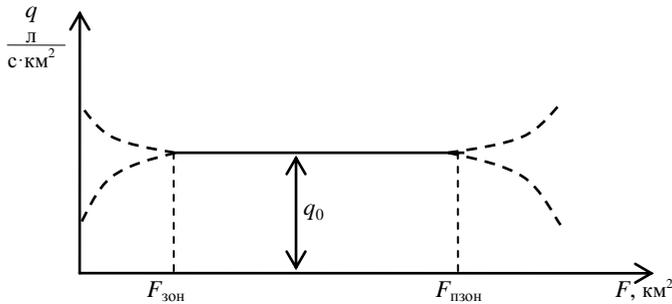


Рис. 1. Зависимость модуля стока  $q$  от площади водосбора  $F$  ( $F < 1000 \text{ км}^2$ , – азональный,  $F > 50\,000 \text{ км}^2$  – полизональный режим формирования стока)

На рис. 1 показаны возможные виды изменения модуля стока с увеличением площади водосбора. В зоне от 0 до  $F_{\text{зон}}$  модуль стока может увеличиваться или уменьшаться с ростом площади водосбора реки, что выражается на графике разбросом точек. Характер этого разброса определяется местными условиями формирования стока. Значение  $F_{\text{зон}}$  будет зависеть в основном от глубины залегания подземных вод: чем они ближе к поверхности, тем оно будет меньше, поскольку тем скорее река сможет дренировать все питающие ее водоносные горизонты. Значение  $F_{\text{пзон}}$  более стабильны по территории и находятся обычно в пределах 50–75 тыс. км<sup>2</sup>, хотя для отдельных рек могут быть и более. Площадь, заключенная между  $F_{\text{зон}}$  и  $F_{\text{пзон}}$ , присуща рекам с зональным режимом формирования стока и является репрезентативной для построения карт изолиний стока. Реки с площадью больше  $F_{\text{пзон}}$  относятся к категории полизональных, или больших рек.

Зависимость, представленная на рис. 1, легко подтверждается теоретически (до точки  $F_{\text{пзон}}$ ). Приводится только необходимое для дальнейшего изложения уравнение, его вывод опускается (см. [4]).

$$\bar{q}(F) = \bar{q}_0 e^{-(\bar{c}-0,5G_{\bar{c}})F} + \frac{\bar{N} - 0,5G_{\bar{c}\tilde{N}}}{\bar{c} - 0,5G_{\bar{c}}} (1 - e^{-(\bar{c}-0,5G_{\bar{c}})F}), \quad (1)$$

где  $\bar{q}$  – норма модуля стока;  $F$  – площадь водосбора;  $\bar{q}_0$  – начальное значение нормы модуля стока;  $\bar{N}$ ,  $\bar{c}$  – нормы величин, связанных с интенсивностью осадков и коэффициентом стока соответственно;  $\tilde{c}$ ,  $\tilde{N}$  – «пространственные» белые шумы;  $G_{\bar{c}\tilde{N}}$ ,  $G_{\bar{c}}$  – интенсивность «пространственных» шумов бассейна.

Решения, аналогичные соотношению (1), можно получить и для старших моментов. Редукционные кривые есть, по существу, графические изображения подобных решений. Такие кривые построены по материалам работы [5] на основе наблюдений на 5595 гидростворах СССР. Они могут, в частности, служить для определения репрезентативной площади  $F_{\text{репр}}$  [4].

При площадях  $F_{\text{ин}} = F_{\text{репр}}$  ( $F_{\text{ин}}$  – «инерционный» параметр «пространственной релаксации», т. е. площадь водосбора, на которой бассейн начинает адекватно реагировать на внешние воздействия, где перестают проявляться азональные факторы формирования стока) «переходные» процессы практически затухают и норма модуля стока определяется не азональными факторами (которые формируют «начальное» условие  $\bar{q}_0$ ), а зональными (в основном нормой осадков и коэффициентами стока):

$$\bar{q} = (\bar{N} - 0,5G_{\bar{c}\tilde{N}}) / (\bar{c} - 0,5G_{\bar{c}}). \quad (2)$$

При нормальном распределении ( $G_{\bar{c}} = 0$ ,  $G_{\bar{c}\tilde{N}} = 0$ ) приходим к обычно используемой в гидрологии формуле вычисления коэффициента стока:  $k = \bar{q} / \bar{X}$  (здесь  $\bar{X}$  – норма модуля осадков) [4].

В рамках частично инфинитной гидрологии [4] существуют возможности моделировать и прогнозировать статистически неустойчивые процессы путем расширения фазовых пространств изучаемых систем. Размерность фазового пространства соответствует числу фазовых переменных  $x_n$  [а значит, числу дифференциальных уравнений первого порядка и, следовательно, размерности  $n$  распределений  $p(x_1, \dots, x_n)$ ], которые надо применять для устойчивого прогнозирования.

Судя по зависимостям (1, 2), в осредненном смысле зональное поле более или менее устойчиво, хотя полной «равновесности» по коэффициентам вариации  $C_v$  и асимметрии  $C_s$  нет:  $\partial C_v / \partial F \neq 0$ ,  $\partial C_s / \partial F \neq 0$ . Поле в современном понимании – это (по определению) распределение по площади трех начальных моментов, из которых следуют расчетные характеристики. Наиболее устойчивая из них – норма стока.

Фрактальная диагностика позволяет установить, сколько фазовых переменных участвуют в формировании стока. Ее суть сводится к тому, что по наблюдениям за одной (доступной измерению) фазовой переменной (расходу, в нашем случае) можно судить о числе реальных «участников» процесса формирования стока в речном бассейне. Если изучаемая система находится в процессе развития, то упомянутая выше размерность – дробная, а ближайшее, превосходящее ее целое число (так называемая размерность пространства вложения) указывает на размерность линейной системы дифференциальных уравнений, позволяющей устойчиво описывать процессы на речном бассейне (а значит, и делать устойчивые прогнозы). Методика фрактального диагностирования применительно к гидрологии описана в работах [4, 6]. Результаты ее применения для суточных расходов в летне-осенний период для рассматриваемой территории закартированы на рис. 2.

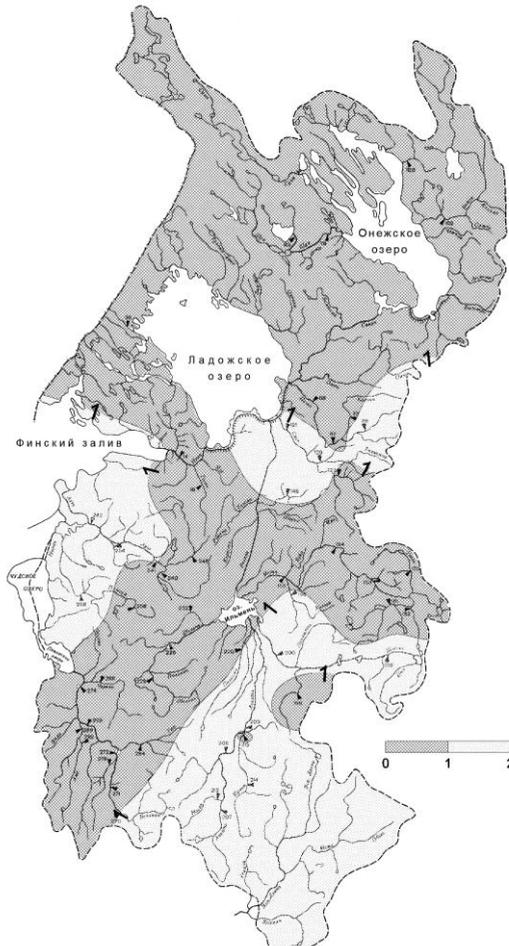


Рис. 2. Распределение размерности пространства вложения (карта построена по рядам суточных расходов за летне-осенний период 1980 г.) [3]

**Метод практического нахождения фрактальной размерности**

С практической точки зрения проще всего определяется корреляционная размерность:

$$D = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left( \sum_{i=0}^{M(\varepsilon)} P_i^2 \right)}{\ln \varepsilon}. \quad (3)$$

Величина  $P_i$  – это вероятность попадания точки в  $i$ -ю ячейку размером  $\varepsilon$ ;  $P_i^2$  – вероятность попадания в эту ячейку двух точек;  $\sum_{i=0}^{M(\varepsilon)} P_i^2$  – вероятность того, что две произвольные точки лежат внутри ячейки размером  $\varepsilon$ . Эта сумма есть следующий парный корреляционный интеграл:

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i>j} \Theta(\varepsilon - |\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \approx \frac{N^2(\varepsilon)}{N^2}, \quad (4)$$

где  $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$  – расстояние между парами точек  $ij$  на траектории  $\vec{r}$  рассматриваемой динамической системы (здесь  $\Theta = 1$ , если  $\varepsilon - |\vec{r}_i - \vec{r}_j| \geq 0$ ;  $\Theta = 0$ , если  $\varepsilon - |\vec{r}_i - \vec{r}_j| < 0$ ). Таким образом, из (3) следует, что  $C(\varepsilon) = \varepsilon^{D_2}$  или (обозначим  $D=d$ )

$$d = \ln C(\varepsilon) / \ln(\varepsilon). \quad (5)$$

При использовании этого метода применяется так называемое псевдофазовое пространство. Дело в том, что при изучении той или иной системы обычно неизвестно, сколько фазовых переменных ее описывают. В случае речного бассейна, например, обычно известен только ряд наблюдений за расходом  $Q(t)$ . Оказывается, что можно построить ряды  $Q(t + \tau)$ ,  $Q(t + 2\tau)$ , ..., позволяющие, в определенном смысле, получить аналог фазового пространства (рис. 3).

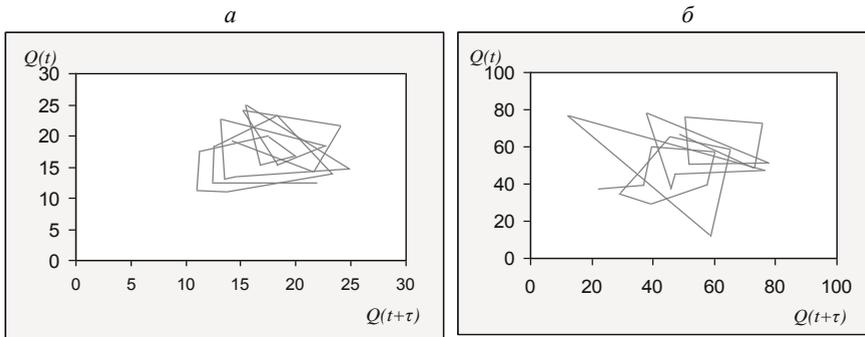


Рис. 3. Пример фазовых портретов, представляющих в двумерном пространстве эволюцию гидрологического режима за несколько десятилетий: а – р. Капша – д. Ерёмина Гора (1955–1980 гг.,  $F_{\text{басс}} = 1560 \text{ км}^2$ ); б – р. Сясь – д. Яхново (1955–1980 гг.,  $F_{\text{басс}} = 6230 \text{ км}^2$ )

Из изложенного вытекает следующий алгоритм [6]:

1. Опираясь на заданный ряд расходов, строится функция для возрастающих значений размерностей фазового пространства  $n$  (рис. 4, а).
2. Определяется «наклон»  $d$  и строится зависимость  $d = f(n)$  (рис. 4, б).
3. По полученной характеристике аттрактора (чаще всего это дробное число) делается вывод о фазовом пространстве вложения, т. е. о количестве необходимых дифференциальных уравнений первого порядка для описания формирования стока.

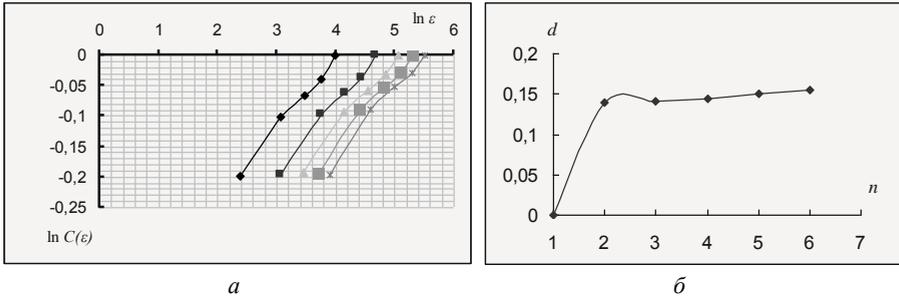


Рис. 4. Примеры зависимостей  $\ln C(\varepsilon) = f(\ln \varepsilon)$  (а) и  $d = f(n)$  (б) на гидрологическом аттракторе р. Плюсса – д. Плюсса

С помощью фрактальной диагностики были получены фрактальные размерности по осредненным в многолетнем разрезе суточным значениям расхода речного стока. На их основе были впервые построены зависимости фрактальной размерности рядов речного стока ( $d$ ) от площадей водосборов ( $F$ ) по данным 50 станций (табл. 2), расположенных на территории Северо-Западного региона, для летне-осенней межени (периода май–октябрь) и для периода ледовых явлений.

Таблица 2

**Расчитанные фрактальные размерности для различных периодов**

Река – пункт	Ср. мн. $d$	Размер пр. вложения	Суточн. $d$ (период май–октябрь)	Суточн. $d$ (период ледовых явлений)	$F$ , км <sup>2</sup>
1	2	3	4	5	6
Нева – д. Новосаратовка	0,99	1	0,78	–*	–
Тосно – ст. Тосно	1,99	2	0,10	0,59	1300
Паша – д. Поречье	0,77	1	0,13	–	1110
Паша – ниже д. Дуброво	1,51	2	0,15	–	3910
Паша – с. Часовенское	0,70	1	0,15	0,44	5710
Капша – д. Еремина Гора	0,75	1	0,13	–	1560
Шуя – д. Бесовец	1,37	2	0,27	–	9560
Сяньга – Чурахалхта	1,38	2	0,72	1,09	1610
Пяльма – д. Пяльма	0,92	1	0,14	–	908
Водла – д. Харловская	1,22	2	0,25	0,70	12000
Сясь – д. Яхново	1,40	2	0,14	0,64	6230
Воложба – д. Воложба	1,15	2	0,16	–	1330
Тихвинка – д. Горелуха	2,19	3	0,14	0,63	2070
Пчевжа – д. Белая	0,56	1	0,14	–	1690

1	2	3	4	5	6
Мста – с. Березовский Рядок	0,59	1	0,23	–	5180
Мста – пос. Потерпелицы	0,60	1	0,20	0,48	13200
Мста – с. Бор	1,14	2	0,19	–	16900
Мста – д. Девкино	0,58	1	0,18	–	22500
Шлина – д. Годыши	0,69	1	0,17	0,78	1620
Березайка – д. Устье	1,51	2	0,52	0,24	3030
Уверь – д. Меглецы	1,10	2	0,21	–	1750
Холово – л. Горбуново	0,54	1	0,19	0,72	1500
Пола – д. Новый Новосел	0,90	1	0,20	0,41	1900
Пола – д. Налючи	1,37	2	0,19	–	6740
Ловать – г. Великие Луки	1,92	2	0,23	0,24	3270
Ловать – д. Сельцо	0,64	1	0,20	–	8230
Ловать – г. Холм	0,64	1	0,20	–	14700
Насва – д. Гороховье	0,68	1	0,22	–	1080
Кунья – д. Уварово	1,35	2	0,32	–	2480
Кунья – г. Холм	1,03	2	0,16	–	5140
Полисть – д. Подтополье	1,37	2	0,30	–	2150
Шелонь – г. Порхов	–	–	0,20	0,12	2950
Шелонь – д. Заполье	1,32	2	0,16	–	6820
Мшага – д. Раглицы	1,32	2	0,13	–	1250
Луга – д. Луга	1,77	2	0,19	–	2330
Луга – ст. Толмачево	0,97	1	0,18	–	6350
Луга – г. Кингисепп	0,54	1	0,15	0,54	12800
Оредеж – д. Моровино	1,41	2	0,16	–	3060
Саба – д. Райково	0,48	1	0,16	0,82	1280
Плюсса – с. Плюсса	1,03	2	0,14	–	1440
Плюсса – д. Брод	2,22	3	0,11	0,42	5090
Великая – д. Мельница	1,04	2	0,27	–	2960
Великая – г. Опочка	0,61	1	0,24	–	3500
Великая – д. Селихново	1,05	2	0,17	–	6350
Великая – д. Гуйтово	1,35	2	0,20	–	13400
Великая – д. Пятоново	1,97	2	0,18	0,26	20000
Исса – д. Визги	2,00	3	0,21	0,17	1410
Сороть – д. Осинкино	1,89	2	0,18	–	3170
Утроя – д. Большая Губа	0,63	1	0,16	–	2970
Лжа – д. Ваньково	1,33	2	0,11	0,27	1560
Череха – д. Сорокина	–	–	0,18	–	2330

*Примечания:* \* – прочерк «–» означает, что для данных станций технология фрактальной диагностики не выдавала каких-то определенных данных, что, однако, не связано с эффективностью методики, скорее с недостаточностью данных или неточностью определения рассматриваемого периода.

### **Анализ полученных результатов**

Вид полученных графиков зависимостей фрактальной размерности от площадей водосборов (рис. 5) говорит о явном сходстве с редуцированными кривыми (рис. 1). Наличествует пучок точек в зоне малых площадей. Такой большой разброс значений фрактальных размерностей связан с азональностью малых водо-

сборов. При малых площадях большее влияние на сток начинают оказывать испарение, подземные воды, что согласно частично инфинитной гидрологии [5] вызывает увеличение значения фрактальной размерности, вплоть до увеличения размерности пространства вложения. С увеличением площади график выравнивается, и можно видеть достаточно явно выраженную область стабильных значений после превышения значений площадей в  $5000 \text{ км}^2$ .

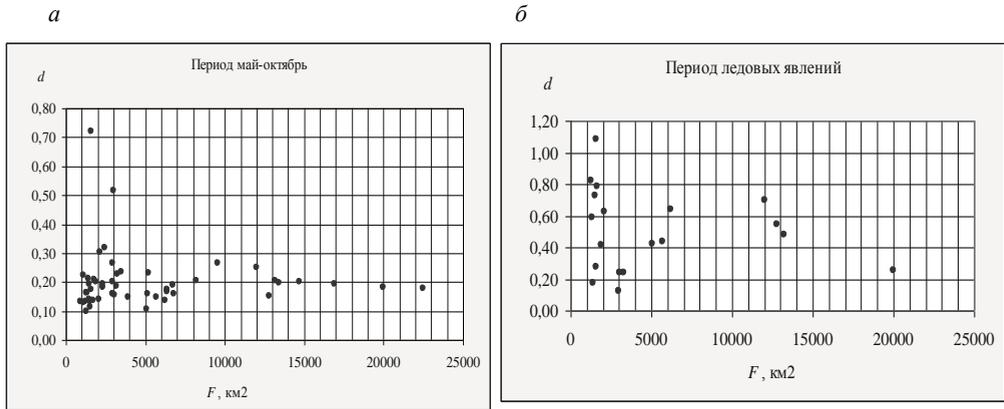


Рис. 5. Графики зависимостей фрактальной размерности от площадей водосборов для летне-осенней межени (период май–октябрь) (а), и для периода ледовых явлений (б)

Наиболее характерный график мы можем наблюдать для периода мая–октября. Для периода ледовых явлений график не столь характерный, однако и тут можно наблюдать скопление точек в области малых площадей, хотя это может быть вызвано и малым числом рассчитанных случаев.

Также была построена зависимость значений фрактальной размерности среднегодовых многолетних значений речного стока от площадей водосборов (рис. 6).



Рис. 6. График зависимости среднегодовых многолетних значений фрактальной размерности  $d = f(n)$  от площадей водосборов для 50 станций Северо-западного региона России

График отдаленно схож с редукционными кривыми: наличествует пучок точек в области малых площадей водосборов, однако нет ярко выраженной «устойчивой» прямой в области, так называемых, репрезентативных площадей. Сильно уходит вверх точка, относящаяся к реке Великой к посту Пятоново ( $d = 1,99$  при  $F = 20\ 000$  км<sup>2</sup>). Такая ситуация может быть связана с тем, что данная река достаточно зарегулирована – две плотины, две полуразрушенные и две действующие ГЭС. Такая зарегулированность может выражаться в том, что сток будет характеризоваться не только «осадковой» составляющей, но и фактором регулирования, что подтверждается фрактальной диагностикой для данной станции (1,99). Это говорит о том, что данный водосбор для устойчивого прогнозирования стока должен описываться моделью второго порядка или системой из двух дифференциальных уравнений.

Исследования частично финансировались Министерством образования и науки Российской Федерации (№ гранта 5.3400.2011). Зависимости фрактальной размерности от площади водосбора получены совместно с к.т.н. Е.В. Гайдуковой.

### **Выводы**

Построены графики зависимостей фрактальных размерностей речного стока от площадей водосборов. Проведен сравнительный анализ данных графиков. В целом, исследование показало сходство полученных графиков с редукционными кривыми.

На основании рассчитанных фрактальных размерностей можно сказать, что для надежных краткосрочных прогнозов для периода май–октябрь по большинству изученных станций можно использовать одно дифференциальное уравнение первого порядка. Только на одной станции при расчетах периода ледовых явлений фрактальная размерность вышла за размерность пространства вложения равной единице и требует привлечения второй фазовой переменной для проведения прогнозирования.

Если рассматривать фрактальные размерности, построенные на основе среднегодовых многолетних значений речного стока, то фрактальная диагностика показывает, что во многих случаях для устойчивого прогнозирования часто достаточно ограничиться системой из двух дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого можно расширить модель, включив испарение, либо вводить в модель учет времени добегания подземной составляющей формирования речного стока (двухъёмкостная модель [4]), либо же вводить нелинейность в модель.

### **Литература**

1. Коваленко В.В. Нелокальная гидрология. – СПб.: РГГМУ, 2010. – 97 с.
2. Коваленко В. В., Гайдукова Е. В., Громова М. Н., Девятов В. С., Хамлили А. Диагностирование неустойчивости формирования и фрактальной размерности многолетних рядов летне-осенней межени Восточной Сибири методами частично инфинитной гидрологии // Уч. зап. РГГМУ, 2010, № 13, с. 30–39.

3. Коваленко В.В., Гайдукова Е.В., Девятков В.С. Фоновое прогнозирование процесса формирования суточных вероятностных стоковых характеристик / Уч. зап. РГГМУ, 2011, № 18, с. 10–20.
4. Коваленко В. В. Частично инфинитная гидрология. – СПб.: РГГМУ, 2007. – 230 с.
5. *Пространственно-временные колебания стока рек СССР* / Под. ред. А. В. Рождественского. – Л.: Гидрометеоздат, 1988. – 376 с.
6. Коваленко В. В., Викторова Н. В., Гайдукова Е. В. Моделирование гидрологических процессов. Изд. 2-е, испр. и доп. – СПб.: РГГМУ, 2006. – 559 с.
7. Коваленко В. В. Частично инфинитный механизм турбулизации природных и социальных процессов. – СПб.: РГГМУ, 2006. – 166 с.