А.В. Даньшина, В.Ю. Чанцев

КОЭФФИЦИЕНТЫ ОБМЕНА ИМПУЛЬСОМ В ДИПОЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ

A.V. Danshina, V.Yu. Chantsev

MOMENTUM EXCHANGE COEFFICIENTS IN DIPOLE STRUCTURE

На основании лабораторных экспериментов по генерации грибовидного течения в однородной пресной жидкости производится параметризация коэффициентов обмена импульсом. Показывается отличие внутренней структуры и величины касательных и нормальных коэффициентов обмена импульсом в случае несимметричности тензора поверхностных напряжений.

Ключевые слова: дипольные структуры, сферический вихрь, грибовидное течение, параметризация, коэффициенты обмена импульсом, несимметричность тензора поверхностного напряжения.

Based on laboratory experiments on the generation of mushroom-like currents in homogeneous fresh water the parameterization of momentum exchange coefficients are considered. The difference of the internal structure and the magnitude of the tangential and normal momentum exchange coefficients in the case of asymmetry of surface stress tensor is presented.

Key words: a dipolar structures, the spherical eddy, a mushroom-like current, a parameterization, momentum exchange coefficients, an asymmetry of surface stress tensor.

Введение

Существующие на сегодняшний день математические модели дипольных вихревых структур, хотя и отражают основные особенности и закономерности их развития, но не полностью описывают механизмы их генерации. Тем не менее, именно возможность учета формирования грибовидных течений в математических моделях динамики верхних слоев океана и прибрежных зон позволит более точно учитывать особенности данных когерентных структур при описании распределения количества движения, водных масс и различных примесей.

Учёт несимметричности поверхностных напряжений, как показано в [4, 5], позволяет описать генерацию и эволюцию подобных дипольных течений. В этом случае изменение направления вектора перемещения определяется не только распределением давления или нормальных напряжений и особенностями граничных условий при решении задач гидродинамики, но также и характером вязких взаимодействий. Однако при использовании такого подхода в уравнениях движения появляются дополнительные члены, представленные смешанными производными второго порядка от ортогональных составляющих скорости движения, которые демонстрирует более тесную связь между проекциями вектора течения на оси евклидовых координат. В связи с этим возникает необходимость в параметризации новых коэффициентов обмена импульсом

Экспериментально полученные данные по генерации дипольного вихря на притопленной струе в однородной по плотности жидкости [6] позволяют сделать некоторые выводы относительно характера взаимодействия инжектируемой струи при лобовом и касательном взаимодействии с окружающей жидкостью.

Параметризация коэффициентов обмена импульсом

Опираясь на хорошо выраженную анизотропию в динамической структуре инжектируемой жидкости, можно заключить, что характер лобового и касательного обмена импульсом должны существенно отличаться как по величине, так и по внутренней структуре. Поэтому рассмотрим отдельно возможные способы описания коэффициентов нормального ($\widetilde{K}_{ii}$) и касательного ($\widetilde{K}_{ij}$) обмена, основанных на анализе осредненного течения.

В проведенных экспериментах [6], а также, следуя данным литературных источников [1, 2, 3], обнаруживается прямая взаимосвязь между скоростью перемещения фронта струйного течения и интенсивностью источника импульса. С другой стороны, поскольку интенсивность нормального обмена импульсом в струйном течении снижается при увеличении продольного градиента скорости, то можно предположить, что коэффициент нормального обмена импульсом имеет обратную связь с рассматриваемым градиентом. Предполагая, что движение стационарно и осуществляется только в одном направлении, получаем баланс между соответствующим нелинейным членом и членом, характеризующим нормальное распространение импульса:

$$\frac{\partial v_i^2}{\partial x_i} = -\frac{\partial \overline{v_i' v_i'}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \widetilde{K}_{ii} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \tag{1}$$

где v_i – продольная составляющая скорости потока.

На основании этого баланса, а также исходя из теории размерности для $\widetilde{K}_{ii}$, как функции скорости потока v_i и продольного градиента скорости $\partial v_i / \partial x_i$ следует, что:

$$\widetilde{K}_{ii} = \frac{v_i^2}{\partial v_i / \partial x_i}. \tag{2}$$

Однако, скорость струйного течения не может превышать скорость возле источника импульса при отсутствии других источников движения, т.е. $v_i \leqslant U_{\text{ист}}$. Учитывая сказанное, коэффициент нормального обмена импульсом запишется в виде:

$$\widetilde{}_{ii} \quad \frac{U_{\text{ист}}^{2} \quad \nu^{2}}{\delta + \dfrac{\partial}{\partial}} \tag{3}$$

где δ – постоянная величина, обеспечивающая ограничение максимального значения коэффициента нормального обмена.

Для сопоставления изменчивости $\widetilde{K}_{ii}$ при различной интенсивности источника импульса используются безразмерные значения интенсивности потока и продольного градиента скорости в потоке:

$$\hat{v}_i = v_i L_* \cdot \left(\nu \operatorname{Re}\right)^{-1},$$
$$\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial \hat{x}_i} = \frac{L_*^2}{\nu \operatorname{Re}} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \tag{4}$$

где $\hat{v}_i$, $\hat{x}_i$ – безразмерные величины скорости и координаты, соответственно; L_* – пространственный масштаб; ν – коэффициент кинематической вязкости; Re – число Рейнольдса.

Введение в безразмерные формы числа Рейнольдса, характеризующего интенсивность источника импульса, позволяет анализировать изменения коэффициента обмена $\widetilde{K}_{ii}$ в зависимости от изменения интенсивности источника. Для демонстрации влияния интенсивности источника импульса на характер изменчивости коэффициента обмена $\widetilde{K}_{ii}$ брались величины числа Рейнольдса соответствующие слабой интенсивности источника импульса, средней интенсивности, в пределах которой чаще всего формируются грибовидные структуры, и интенсивности, при которой наблюдается турбулентный режим.

Максимальное значение $\widetilde{K}_{ii}$ достигается при минимальных значениях скорости течения и его продольного градиента. Величина $\widetilde{K}_{ii}$ возрастает пропорционально росту интенсивности источника импульса, т.е. величины Re. Независимо от величины градиента скорости, значение коэффициента обмена снижается практически до нуля с ростом скорости струйного течения по квадратическому закону. Величина градиента скорости влияет только на крутизну убывания $\widetilde{K}_{ii}$. При больших значениях градиента скорости величина коэффициента убывает медленно, а при градиентах, близких к нулевым значениям, величина $\widetilde{K}_{ii}$ убывает гораздо быстрее с увеличением скорости потока. Так особенности изменчивости нормального коэффициента обмена $\widetilde{K}_{ii}$ при Re = 100 проиллюстрированы на рис. 1*а*.

Коэффициент бокового или касательного обмена импульсом $\widetilde{K}_{ij}$ имеет более сложную структуру, т.к. он должен обеспечивать нелинейное взаимодействие струйного потока с окружающей водной средой. Согласно выводам, полученным относительно вида составляющих тензора напряжений осредненного движения $-\overline{v_i' v_j'}$, вид коэффициентов касательного обмена $\widetilde{K}_{ij}$ можно представить как:

$$\widetilde{K}_{ij} = K_{ij}\left(1 \pm B_{ij}\right), \quad i \neq j, \tag{5}$$

где K_{ij} – коэффициент аналогичный коэффициенту эффективной вязкости, а в B_{ij} заложены деформационные эффекты.

То есть коэффициент $\widetilde{K}_{ij}$ состоит из двух составных частей. Одна часть, представленная величиной K_{ij}, является размерной (L^2T^{-1}) и несет основную функцию коэффициента обмена. Другая часть $\widetilde{K}_{ij}$ является безразмерной и знакопеременной функцией, увеличивающей или уменьшающей величину коэффициента касательного обмена.

Во многих исследованиях эволюции струйного течения (см., например, [1, 8]) отмечается, что в потоке наблюдается эффективная вязкость, зависящая от скорости потока и превышающая кинематическую вязкость окружающих вод. Эта особенность струйных течений демонстрирует ограниченный боковой обмен импульсом с окружающими водами. Отсутствие движения воды возле инжектируемой струи наблюдалось и в лабораторных экспериментах, проводимых в рамках данного исследования. В связи с этим можно предположить, что величина коэффициента касательного обмена импульсом должна быть обратно пропорциональна значению скорости в струйном течении. При этом характер касательного обмена должен быть связан с ортогональным к составляющей v_i скорости течения градиентом этой составляющей потока $\partial v_i/\partial x_j$. На величину коэффициента касательного обмена влияет и выбор пространственного масштаба динамического процесса L_*. Это следует из многочисленных теоретических и экспериментальных исследований классической гидродинамики (см., например, [7]). Таким образом, для струйного потока в однородной жидкости можно составить размерный комплекс:

$$K_{ij} = f\left(\frac{1}{v_i}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, L_*\right). \tag{6}$$

С учетом теории размерностей K_{ij} примет вид:

$$K_{ij} = L_*^3\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 \cdot v_i^{-1}. \tag{7}$$

Поскольку K_{ij} должен иметь значение даже при $v_i \to 0$, то можно записать:

$$K_{ij} = L_*^3\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 \cdot \left(v_i + \delta_1\right)^{-1}, \tag{8}$$

где δ_1 – постоянная величина, обеспечивающая ограничение максимального значения коэффициента K_{ij}.

Знакопеременная составляющая коэффициента касательного обмена ($1 \pm B_{ij}$) обеспечивает только увеличение или уменьшение величины коэффициента K_{ij}. Причем это увеличение или уменьшение должно быть связано с направлением движения жидкости (импульса) по ортогональным осям относительно основного направления движения. Для обеспечения заданного условия функцию ($1 \pm B_{ij}$) представим в виде функции Хевисайда $H(\partial v_j/\partial x_j)$, величина которой определяется ортогональным градиентом нормальной относительно потока составляющей скорости течения:

$$\left(1 \pm B_{ij}\right) = \left[1 \pm \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)\right]. \qquad (9)$$

Собирая обе части коэффициента касательного обмена импульсом $\widetilde{K}_{ij}$ вместе, получаем для него параметризованное выражение:

$$\widetilde{K}_{ij} = \frac{L_*^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2}{v_i + \delta_1} \cdot \left[1 \pm \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)\right]. \qquad (10)$$

Грибовидные течения формируются только при умеренных числах Рейнольдса. При превышении интенсивности потока струйное течение становится турбулентным, и уравнения движения должны описываться классической теорией гидродинамики. В связи с этим в выражении (10) безразмерный комплекс должен стремиться к единице. Для обеспечения данного условия домножим второе слагаемое в безразмерном комплексе выражения (10) на некоторую величину, которая должна стремиться к нулю при возрастании числа Рейнольдса ($d = \varphi(\mathrm{Re}) \to 0$). Самый простой вариант, при котором $d \to 0$, представляет собой величину обратную Re. В результате, получаем окончательное выражение для коэффициента касательного обмена, которое при больших числах Рейнольдса принимает вид, позволяющий приводить уравнения движения к виду классической гидродинамики:

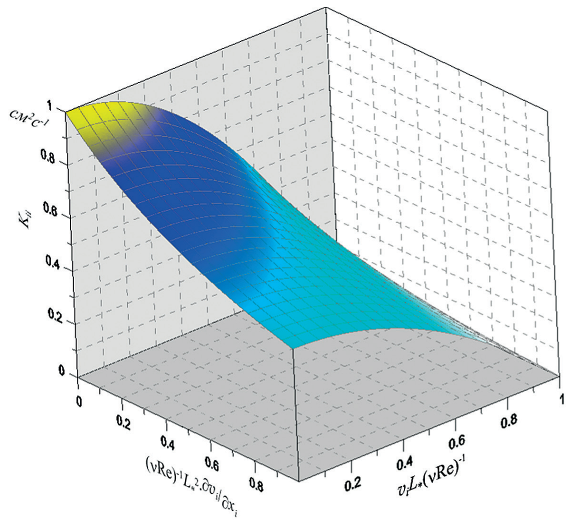
$$\widetilde{K}_{ij} = \frac{L_*^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2}{v_i + \delta_1} \cdot \left[1 \pm \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right) \cdot \mathrm{Re}^{-1}\right]. \qquad (11)$$

Рассматривая влияние изменения скорости потока и ортогонального градиента продольной скорости на поведение коэффициента касательного обмена, можно отметить тот факт, что своего максимального значения $\widetilde{K}_{ij}$ достигает при минимальных скоростях в струйном течении и максимальных ортогональных градиентах. Причем значительное воздействие на величину коэффициента $\widetilde{K}_{ij}$ оказывает как интенсивность потока в виде числа Рейнольдса, так и величина градиента ортогональной составляющей скорости потока. Своих максимальных значений коэффициент $\widetilde{K}_{ij}$ достигает при условии максимального значения градиента $\partial v_j / \partial x_j$ (рис. 1*б*). При условии $\partial v_j / \partial x_j = 0$ максимально возможная величина $\widetilde{K}_{ij}$ снижается в несколько раз. Случай максимального значения градиента $\partial v_j / \partial x_j$, но имеющего обратный знак, приводит к тому, что $\widetilde{K}_{ij} \to 0$. В обоих случаях величина коэффициента обмена быстро начинает возрастать, когда скорость в потоке снижается за отметку 4 % от своего максимального значения. Увеличение $\widetilde{K}_{ij}$ в зависимости от увеличения градиента ($\partial v_i / \partial x_j$) носит более плавный характер.

Таким образом, основная область действия коэффициента касательного обмена импульсом лежит в области умеренных и низких скоростей движения жидкости. Повышение интенсивности источника импульса приводит к увеличению коэффициента обмена $\widetilde{K}_{ij}$, причем максимальные значения этого коэффициента при возрастании числа Рейнольдса на порядок увеличиваются всего в несколько раз, что отличает его от коэффициента нормального обмена импульсом.

При повышении интенсивности источника импульса влияние безразмерного комплекса на величину коэффициента касательного обмена импульсом сказывается еще меньше. Так при Re = 1000 разность между максимальными значениями $\widetilde{K}_{ij}$ для градиентов $\partial v_j/\partial x_j$ противоположного знака не превышает 1 %, что позволяет рассматривать коэффициент $\widetilde{K}_{ij}$, уже как коэффициент, описываемый классической теорией гидродинамики.

а)



б)

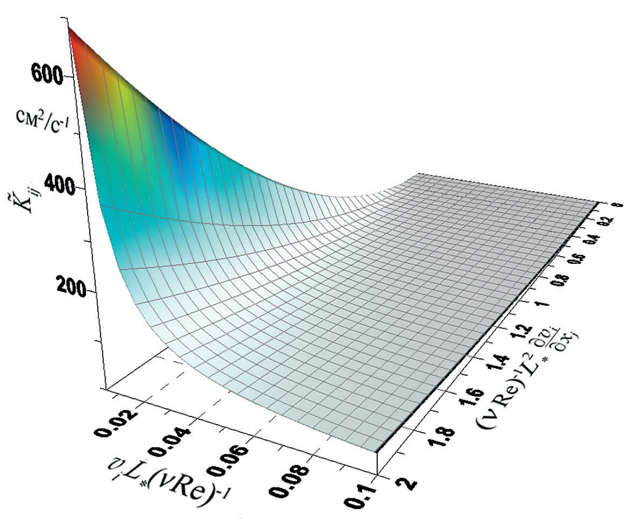


Рис. 1. Коэффициенты обмена импульсом при Re = 100:
а – нормального обмена K_{ii}; *б* – касательного обмена $\widetilde{K}_{ij}$ при $2arctg(\partial v_j/\partial x_j)\cdot\pi^{-1} = 1$

При сравнении коэффициентов нормального $\widetilde{K}_{ii}$ и касательного $\widetilde{K}_{ij}$ обмена импульсом необходимо отметить, что основную роль в динамике струйного потока и формировании упорядоченных динамических систем играет $\widetilde{K}_{ij}$. Даже при малой интенсивности источника импульса ($Re = 1 \div 10$) коэффициент $\widetilde{K}_{ij}$ на порядок превышает величину коэффициента $\widetilde{K}_{ii}$. Причем это влияние в большей степени проявляется во фронтальной области струйного течения, где скорость движения потока резко снижается, а градиенты скорости еще сохраняются значительными.

Выводы

Параметризация коэффициентов обмена импульсом для уравнений движения в случае несимметричности тензора поверхностных напряжений была направлена на возможность описания генерации течения дипольного типа при ограничениях, накладываемых на интенсивность источника импульса.

Было показано, что полученные коэффициенты нормального и касательного обмена импульсом существенно отличаются между собой по величине и внутренней структуре. Причем ведущая роль в формировании грибовидного течения принадлежит коэффициенту касательного обмена импульсом особенно во фронтальной области потока. Коэффициент касательного обмена импульсом имеет более сложную структуру и по величине превосходит коэффициент нормального обмена при одних и тех же исходных параметрах.

Работа выполнена по гос. заданию вузам (Рег. № НИР 5.956.2011)

Литература

1. *Афанасьев Я.Д., Воропаев С.И., Филиппов И.А.* Модель грибовидных течений в стратифицированной жидкости при непрерывном действии источника импульса. // Изв. АН СССР, Сер. ФАО, 1989, Т. 25, № 7, с. 741–749.
2. *Воропаев С.И.* Теория автомодельного развития струи в однородной жидкости. // Изв. РАН. Сер. ФАО, 1985, Т. 21, № 12, с. 1290–1294.
3. *Воропаев С.И., Филиппов И.А.* Развитие горизонтальной струи в однородной по плотности и стратифицированной жидкостях. Лабораторный эксперимент. // Изв. РАН. Сер. ФАО, 1985, Т. 21, № 9, с. 964–972.
4. *Даньшина А.В., Карлин Л.Н., Чанцев В.Ю.* Несимметричность напряжений вязкой несжимаемой жидкости. // Ученые записки РГГМУ, 2011, №. 20, с. 156–166.
5. *Даньшина А.В.* Влияние несимметричности поверхностных напряжений на формирование грибовидного течения. // Автореф. дис. канд. физ-мат. наук. – СПб., 2011, 22 с.
6. *Карлин Л.Н., Даньшина А.В.* Экспериментальные исследования течений дипольного типа при условии твердой крышки. // Ученые записки РГГМУ, 2008, № 7, с. 74–80.
7. *Колмогоров А.Н.* Почти горизонтальная турбулентность. // Успехи математических наук, 2004, т. 59, вып. 2(356), с. 3–8.
8. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 712 с.