

В.В. Коваленко

**О ВЛИЯНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ЭКСЦЕССА НА ЗАВИСИМОСТЬ
ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ РЯДОВ МНОГОЛЕТНЕГО СТОКА ОТ
КЛИМАТИЧЕСКОЙ НОРМЫ ПРИЗЕМНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЗДУХА**

V.V. Kovalenko

**ABOUT INFLUENCE OF FACTOR OF AN EXCESS ON DEPENDENCE
OF FRACTAL DIMENSION OF LINES OF A LONG-TERM FLOW FROM
CLIMATIC NORM OF AIR TEMPERATURE**

Представлена математическая модель формирования многолетнего речного стока, обосновывающая выявленную ранее закономерность изменения фрактальной размерности многолетних рядов расходов воды. Приведены статистические данные, показывающие роль коэффициента эксцесса при классификации распределений плотности вероятности в диапазоне среднемультилетних температур воздуха от -5 до 27 °С.

Ключевые слова: математическая модель, фрактальная размерность рядов стока, коэффициент эксцесса, норма приземной температуры воздуха.

The mathematical model of formation of a long-term river flow proving the revealed earlier law of change of fractal dimension of long-term lines of the charges of water is submitted. The statistical data, showing a role of factor of an excess at classification of distributions of density of probability in a range of air temperatures from -5 up to 27 °C.

Key words: mathematical model, fractal dimension of lines of a flow, factor of an excess, norm of air temperature.

Введение

Из уравнения годового водного баланса речного бассейна $X = Q + E \pm \Delta U$ (здесь X – осадки; E – испарение; ΔU – изменение запасов воды в почвогрунтах) следует, что статистическим описанием реакции бассейна на внешнее воздействие (ресурс X) является трехмерная плотность вероятности $p(Q, E, \Delta U)$. В силу ряда причин (практическая необходимость знания только статистически обеспеченных расходов и отсутствие сети наблюдений за испарением и запасами воды в почвогрунтах) используются только одномерные проекции $p(Q)$, что официально зафиксировано в нормативных документах [8]. Это приводит к проблемам, связанным с неустойчивостью моментов одномерных вероятностных распределений из-за наличия мультипликативных шумов в стохастической модели формирования многолетнего стока (уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова – ФПК), которыми моделируются влияние не учитываемых (явным образом) фазовых переменных E и ΔU . Визуально это проявляется в появлении полимодальности распределений $p(Q)$ или наличии у них «толстых хвостов» [2, 7].

Для борьбы с этой неустойчивостью была разработана методология [1], основанная на разгрузке мультипликативной составляющей шумов за счет увеличения размерности фазового пространства, в котором моделируется процесс формирования стока. Выполнение фрактального диагностирования (использовалась корреляционная размерность, которая по теореме Такенса [5, 10] восстанавливается по измерениям лишь одной фазовой переменной) 756 рядов годового стока (в основном для рек Северного полушария) позволило установить (см. [4]) ранее неизвестную закономерность параболической зависимости фрактальной размерности от климатической нормы приземной температуры воздуха, рис. 1а. Оказалось, что в диапазоне 1,6–7 °С примерно для трети речных бассейнов в процессе формирования стока статистически значимо участвуют все три фазовые переменные (рис. 1б).

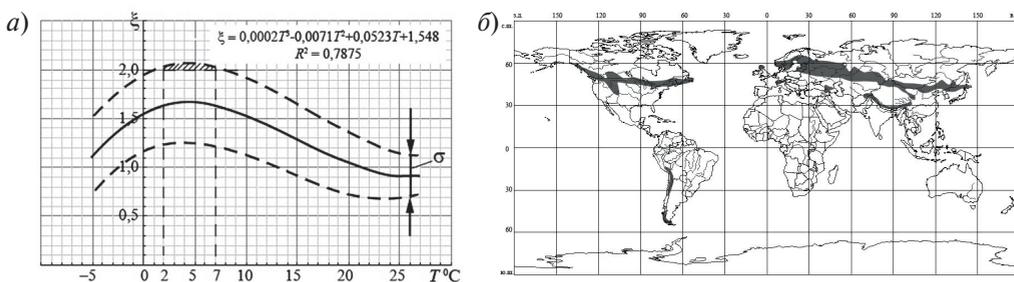


Рис. 1. Зависимость фрактальной размерности рядов среднегодового многолетнего стока от климатической нормы температуры воздуха (а) и наиболее вероятные регионы с неустойчивыми моментами одномерных распределений расходов воды (серый цвет) (б).

Это не означает, что в другом диапазоне температур не могут встречаться фрактальные размерности больше двух, но в данном диапазоне их значительно больше и в среднем составляет 31 %. Также это не означает, что почвогрунты вне пределов этой температурной полосы не участвуют в формировании стока. Просто их влияние, в рамках существующей точности методики фрактального диагностирования, не обнаруживается.

Факт обнаружения подобной закономерности поднимает, по крайней мере, два вопроса: 1) где та модель формирования стока, которая приводит к трехмерному распределению $p(Q, E, \Delta U)$? 2) любая закономерность отражает сущность какого-либо явления, которое должно себя каким-то образом обнаружить в силу своей феноменологичности. Как проявляет себя явление, сущность которого отражает выявленная закономерность?

Цель статьи и состоит в ответе на эти два вопроса. Для ее достижения надо: а) получить модель формирования стока, которая бы отражала эволюцию распределения $p(Q, E, \Delta U)$; б) визуализировать подобное решение и убедиться, что в полосе 1,6–7 °С оно составляет не менее 30 % и что эта цифра больше, чем в других интервалах температур (меньше 1,6 °С и больше 7 °С); в) выявить роль эксцесса в установленной закономерности.

Выявление сущности обсуждаемой закономерности

Для ее теоретического обоснования необходимо получить модель формирования многолетнего речного стока, которая: 1) в качестве решения давала бы эволюцию распределения $p(Q, E, \Delta U)$; 2) при игнорировании самостоятельной роли испарения и влагозапасов в почвогрунтах в процессе формирования стока редуцировалась бы в модель для одномерного распределения $p(Q)$, которая для стационарных случайных процессов (в настоящее время «нормативная гидрология» представляет речной сток именно таким образом) переходила бы в уравнение Пирсона, которое дает семейство решений, среди которых и рекомендуемые СП 33-101-2003 [8] кривые Пирсона III типа и их модификация с фиксированной левой границей $p(Q = 0) = 0$, предложенная С.Н. Крицким и М.Ф. Менкелем [1]. Фактически необходимо получить 3-мерное уравнение ФПК.

В качестве динамического ядра подобной модели возьмем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dQ}{dt} = \left(\frac{\dot{X}}{W_Q} - \frac{Q + E + \Delta U}{W_Q} \right) Q, \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{\dot{X}}{W_E} - \frac{Q + E + \Delta U}{W_E} \right) E, \quad (2)$$

$$\frac{d\Delta U}{dt} = \frac{\dot{X} - Q - E - c \cdot \text{sgn}(\dot{X} - Q - E)}{\tau_{\Delta U}}, \quad (3)$$

где Q, E и ΔU – скользящие среднегодовые значения; W_Q, W_E – емкости стоковой и испарительной сред; $\text{sgn}(\dot{X} - Q - E)$ – знаковая функция; c – скорость накопления влаги в почвогрунтах; $\tau_{\Delta U}$ – время релаксации почвогрунтов.

Аттрактор системы (1)–(3) и временная развертка его двумерной проекции представлены на рис. 2а,б. Он имеет хаусдорфову размерность между 2 и 3 (т.е. дробную, фрактальную) и представляет собой (метафорически) «тарелку», т. е. объект, который «недоосвоил» третью координату. Появление именно подобных решений следует ожидать с вероятностью 31 % в пределах 1,6–7 °С на рис. 1а.

Стохастическое обобщение системы (1)–(3) можно выполнить путем введения в правые части уравнений аддитивного шума $\gamma = \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma}$ (здесь $\tilde{\gamma}$ – статистическая норма равная нулю; $\tilde{\gamma}$ – белый шум с интенсивностью $G_{\tilde{\gamma}}$):

$$\frac{\partial p(\bar{x}, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} [A_i(\bar{x}, t) p(\bar{x}, t)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [B_{ij}(\bar{x}, t) p(\bar{x}, t)], \quad (4)$$

где $\vec{x} = (Q, E, \Delta U)$; коэффициенты диффузии $B_Q = G_{\gamma Q}$; $B_E = G_{\gamma E}$; $B_{\Delta U} = G_{\gamma \Delta U}$, а коэффициенты сноса A_Q, A_E и $A_{\Delta U}$ определяются правыми частями уравнений (1)–(3).

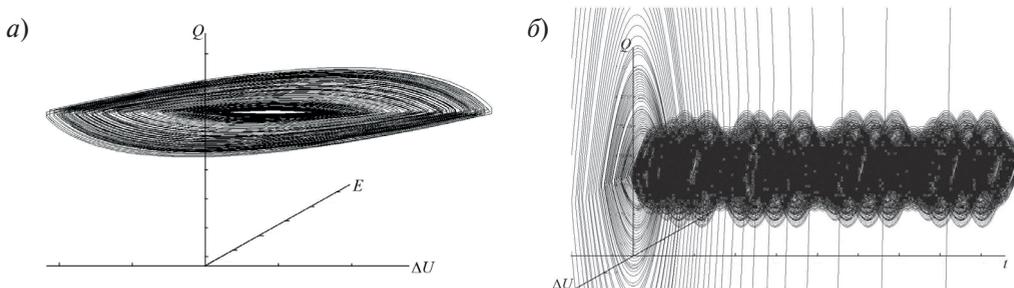


Рис. 2. Аттрактор системы (1)–(3) (а) и временная развертка его двумерной проекции (б).

Базовая модель инженерной гидрологии в виде уравнения Пирсона получается как частный случай уравнения ФПК для $p(Q)$. Последнее же есть частный случай уравнения (4), если формирование расхода описывается только стохастическим уравнением

$$dQ = [-(\bar{c} + \tilde{c})Q + \bar{N} + \tilde{N}] dt, \quad (5)$$

где $c = 1/k\tau = \bar{c} + \tilde{c}$; $N = \dot{X}/\tau = \bar{N} + \tilde{N}$ (здесь k – коэффициент стока; τ – время релаксации речного бассейна; \bar{c} и \bar{N} – математические ожидания; \tilde{c} и \tilde{N} – белые шумы с интенсивностями $G_{\tilde{c}}$, $G_{\tilde{N}}$ и взаимной интенсивностью $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$). Величинами \bar{c} , $G_{\tilde{c}}$, $G_{\tilde{N}}$, $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$ косвенно учитывается влияние «опущенных» фазовых переменных E и ΔU . Уравнение (1) получается, если «убрать» коэффициент стока, т.е. «потери» отсутствуют при явном учете всех фазовых переменных, а время релаксации связать с емкостью бассейна $\tau = W_Q/Q$.

Если считать, что существует стационарное распределение ($\partial p(Q, E, \Delta U)/\partial t = 0$) и сделать обычное для подобных случаев предположение о равенстве потоков вероятности при бесконечных значениях фазовых переменных нулю, то придем к дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка:

$$G_{\gamma Q} \frac{\partial p}{\partial Q} + G_{\gamma E} \frac{\partial p}{\partial E} + G_{\gamma \Delta U} \frac{\partial p}{\partial \Delta U} = 2(A_Q + A_E + A_{\Delta U}) p. \quad (6)$$

Решением уравнения (6) будут одномодальные 3-мерные распределения. Однако, если допущение стационарности снять, то метод характеристик сводит задачу (при $G_{\gamma Q} = G_{\gamma E} = G_{\gamma \Delta U} = 0$) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (1)–(3) с дополнительным четвертым уравнением:

$$\frac{dp}{dt} = -p \left(\frac{\dot{X} - 2Q - E - \Delta U}{W_Q} \right) - p \left(\frac{\dot{X} - Q - 2E - \Delta U}{W_E} \right). \quad (7)$$

Решением системы (1)–(3), (7) является распределение с «дыркой» (см. рис. 3а,б). С одной стороны, если убрать все возможные (аддитивные и мультипликативные) шумы, то распределение (в силу конкурентного типа взаимодействия Q и E) будет вырождаться в δ -функцию. Но, с другой стороны, «дырка» (она еще вдобавок «дышит»), меняя свой диаметр около модального значения делает невозможным определение (по крайней мере, «строго») плотности вероятности для проекции $p(Q)$ (рис. 3б) многомерного распределения $p(Q, E, \Delta U)$.

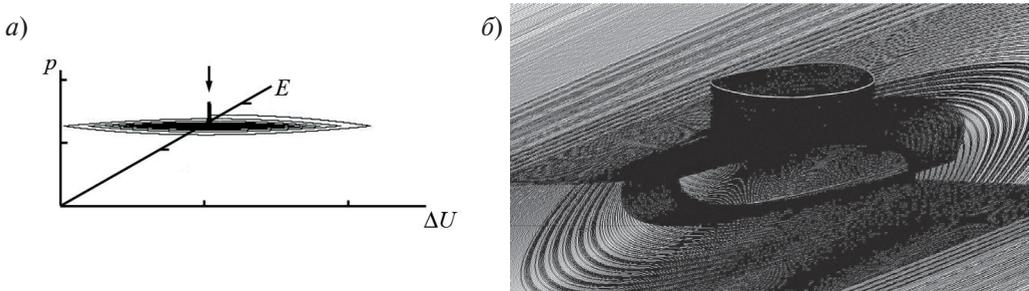


Рис. 3. Трехмерная проекция решения системы (1)–(3), (7) (а) и увеличенный ее фрагмент при взгляде сверху (см. стрелку на рис. а) (б).

Роль коэффициента эксцесса

Это не мешает гидрологам строить эмпирические одномерные распределения $p(Q)$, не ощущая при этом тех проблем, о которых упоминалось. Их просто «не существует» в рамках инженерной гидрологии, так как последняя опирается только на ту сторону науки, которая констатирует окружающую реальность. Эта констатация осуществляется фактическими рядами наблюдений за стоком, вероятностные распределения которых аппроксимируются решениями уравнения Пирсона, коэффициенты которого используют как подгоночные к эмпирическому полю точек на кривых обеспеченности. Если упоминается неустойчивость моментов, то имеется в виду неустойчивость их статистических оценок из-за коротких рядов (а не неустойчивость решений моделей формирования стока в виде системы дифференциальных уравнений для моментов). Вторые моды эмпирических распределений считаются статистически незначимыми (по тем же причинам – недостаточности наблюдений).

Однако все эти проблемы становятся очевидными как только мы перейдем к использованию второй стороны науки – прогностической. Без модели формирования стока прогноз не сделать, тут одних рядов мало. А фрактальная диагностика показывает, что распределения вероятности в определенных географических зонах должны быть 3-мерными, решения моделей могут быть двухмодальны, а одномерные проекции моделей приводят к неустойчивым решениям для моментов и т.д.

Поэтому если модели формирования стока действительно многомерны, то эмпирический материал должен в той или иной степени и форме порождать рассмотренные особенности этих решений. Это подтверждает таблица. Как известно, за

распластанность и островершинность распределений отвечает коэффициент эксцесса ϵ [6]. Из таблицы видно, что во всех трех температурных зонах есть ряды как с положительными значениями ϵ , так и отрицательными. Однако из-за большой погрешности вычисления ϵ (при коротких рядах) имеет смысл ориентироваться на средние (по всем рядам для каждой зоны) его значения, которые для северной полосы близки к нулю, а для интересующей нас полосы 1,6–7 °С – 0,25. Это указывает на то, что в данной полосе объективно преобладают островершинные распределения (хотя много распределений и с небольшими отрицательными значениями ϵ , т.е. с приплюснутой или 2-модальной вершиной). Практически это ведет к наличию в этой зоне распределений с «толстыми хвостами» и вытекающими отсюда отрицательными последствиями для надежности гидротехнических сооружений и вообще управления водными ресурсами.

Таблица*

Статистические характеристики рядов стока

Характеристики рядов	T °C		
	–5 ... 1,6	1,6 ... 7	7 ... 27
Число рассмотренных рядов	125	125	242
Число случаев с положительными значениями коэффициента эксцесса (в %)	38	47	43
Среднее значение коэффициента эксцесса	0,01	0,25	0,23
Число случаев (в %), в которых визуально наблюдались одномодальные гистограммы (число столбцов 7)	63	75	52
Параметр β_1 , классифицирующий распределения Пирсона	0,34	0,48	0,76
Параметр β_2 , классифицирующий распределения Пирсона	3,01	3,25	3,23

* Получена совместно с Е.В. Гайдуковой

Это связано с тем, что при таких значениях меры крутости распределений число случаев отклонений от среднего значения (\bar{Q}) на утроенное основное отклонение (σ) значительно больше, чем при нулевых ее значениях (например, при $\bar{Q} = 785,6$; $\sigma = 181,2$; $\epsilon = 1,753$ и коэффициенте асимметрии $C_s = -0,393$ – на порядок, см. [6], стр. 130).

Существует диаграмма типов распределений К. Пирсона, которая строится в координатах $\beta_1 = (C_s)^2$ и $\beta_2 = \epsilon + 3$ [9]. Вычисления показали (рис. 4), что точки, помещенные на эту диаграмму с использованием координат β_1 и β_2 (осредненные значения в пределах каждой из температурных зон по всем рядам) оказались в области, соответствующей I типу (бэ́та-распределение) рядом с линией $2\beta_2 - 3\beta_1 - 6 = 0$, соответствующей III типу, которым в инженерной гидрологии аппроксимируют эмпирические распределения. Для критической температурной зоны (1,6–7 °С) точка находится в области, соответствующей VI типу (бэ́та-распределение II рода). Расположение точек таково, что оно позволяет статистически значимо различать их координаты β_1 и β_2 и идентифицировать (независимо от фрактальной диагностики) полосу температур 1,6–7 °С [3].

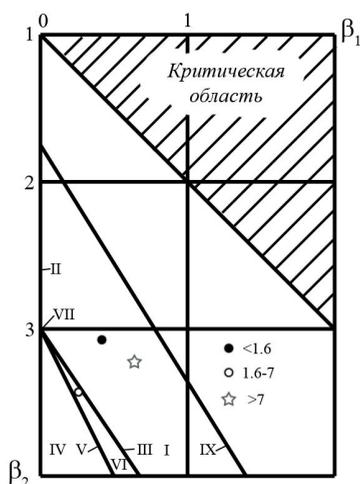


Рис. 4. Часть диаграммы различных распределений семейства К. Пирсона (в диапазоне температур $-5-27^{\circ}\text{C}$).

Выводы

В статье для выявленной ранее закономерности влияния температуры воздуха на фрактальную размерность рядов речного стока показано, что именно может служить визуальным образом явления (одномодальные «островершинные» распределения плотности вероятности с положительными значениями коэффициента асимметрии) и сущности (модель динамики трехмерного распределения плотности вероятности), которые составляют диалектическое единство, нашедшее отражение в обсуждаемой закономерности. Эмпирически установлено, что статистические распределения многолетних рядов среднегодового стока для температурной зоны с преобладанием высоких значений фрактальной размерности соответствуют бэта-распределениям II рода, причем на диаграмме К. Пирсона этот тип отличается от кривых плотности вероятности в других температурных зонах статистически значимо по коэффициенту эксцесса.

Исследования финансировались Министерством образования и науки РФ (проекты № 14.515.11.0002, 5.3400.2011, 14.V37.21.0678).

Литература

1. Крицкий С.Н., Менкель М.Ф. О приемах исследования случайных колебаний речного стока. // Труды НИУ ГУГМС, 1946, сер. 4, вып. 29, с. 3–32.
2. Коваленко В.В. Частично инфинитное моделирование: основание, примеры, парадоксы. — СПб.: Политехника, 2005. — 408 с.
3. Коваленко В.В. Диагностирование бифуркационных очагов при формировании многолетнего годового стока (на примере ЕТР). // Ученые записки РГГМУ, 2013, № 27, с. 7–16.

4. Коваленко В.В., Гайдукова Е.В. Влияние климатической нормы приземной температуры воздуха на фрактальную размерность рядов многолетнего речного стока. // ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2011, т. 439, № 6, с. 815–817.
5. Коваленко В.В., Гайдукова Е.В., Куасси А.Б.Г. Прогнозирование изменений фрактальной размерности многолетнего речного стока. // География и природные ресурсы, 2008, № 4, с. 136–143.
6. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. – М.: Наука, 1971. – 578 с.
7. Найденов В.И. Нелинейная динамика поверхностных вод суши. – М.: Наука, 2004. – 318 с.
8. СП 33-101-2003. Определение основных расчетных гидрологических характеристик. / Госстрой России. – М.: ФГУП ЦПП, 2004. – 73 с.
9. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
10. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. // Lect. Notes in Math. – Berlin: Springer, 898 (1981), p. 336–381.