С.Д. Винников, А.А. Зорина

К АНАЛИЗУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ПОВЕРХНОСТИ С ЗАДАННЫМ ДЛЯ НЕЁ УКЛОНОМ

S.D. Vinnikov, A.A. Zorina

TO ANALYSIS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS DESCRIBING MOTION OF VISCOUS FLUID ON THE SURFACE WITH THE SLOPE SPECIFIED FOR IT

Осуществляется уточнение представления скорости в дифференциальных уравнениях, описывающих движение потока вязкой жидкости по подстилающей его поверхности.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса и Сен-Венана; равномерное и неустановившееся движение жидкости; силы, обусловливающие движение жидкости.

Specification of velocity conception in differential equations describing motion of viscous fluid on underlying surface is realized.

Key words: Navier–Stokes and Saint-Venant's equations; uniform and unsteady motion of liquid; forces causing the liquid movement.

В последнее время появилась работа Мухтарбай Отелбаева [9], в которой рассматривается решение уравнений Навье–Стокса при некоторых заданных условиях однозначности. При этом автор отмечает, что уже существуют частные решения этих уравнений, на которые он и ссылается по тексту, например, на работу [7].

Имея некоторый опыт по решению уравнения Сен-Венана для одномерного потока [3], полученного Буссинеском из уравнения Навье–Стокса, попытаемся показать, что в работе [9], да и в других подобных работах, при решении уравнений Навье–Стокса, а в случае турбулентного потока уравнений Рейнольдса и Маккавеева [6], не достаточно строго учитывается физика явления движения потока вязкой жидкости. Например, в названных уравнениях не корректно учитывается гидравлическое сопротивление потока движущегося по поверхности, которое при ламинарном режиме движения вязкой жидкости переменное — зависит от скорости ее движения, а при турбулентном оно постоянное — не зависит от скорости движения жидкости. Это убедительно показал Никурадзе [8], проведенными экспериментами с движущейся жидкостью в трубах, а в открытых потоках Зегжда [4]. Они установили связь коэффициента гидравлического сопротивления с числом Рейнольдса Re и относительным радиусом R/Δ и относительной глубиной H/Δ (Δ — высота выступов дна). Эксперименты ими выполнены при движении равномерного потока. Казалось бы, какое отношение они имеют для неустановившегося движения потока, описываемого названными выше уравнениями. Ответ один — прямое. Покажем это на примере прямолинейного движения потока жидкости, как самого простого и поэтому наглядного.

Нам известно, что в основе вывода уравнений Навье–Стокса лежит уравнение изменения импульса тела (жидкости, заключенной в объеме V) в единицу времени в зависимости от суммы внешних сил, приложенных к этому телу, которое в результате выполненных математических преобразований и соответствующих рассуждений приводится к виду:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\, p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости; t — время; $\boldsymbol{F}$ — вектор ускорения свободного падения; ρ — плотность; p — гидродинамическое давление; ν — кинематический коэффициент вязкости.

В применении к прямолинейному потоку и пренебрежении изменением гидродинамического давления уравнение (1) примет вид:

$$\frac{dv_x}{dt} = F_x + \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}, \tag{2}$$

в котором в проекции на ось x прямоугольной системы координат слагаемое dv_x/dt пропорционально силе инерции движущегося тела (жидкости), F_x — силе тяжести этого тела, $\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$ — силе внутреннего трения, возникающего в нем в результате проявления вязких напряжений между слоями жидкости, изменяющихся по глубине потока и убывающих в направлении от дна к поверхности.

Переходя в (2) к осредненной скорости по вертикали потока и заменяя последнее слагаемое на выражение, пропорциональное соответственно силе трения потока жидкости имеющей место на обтекаемой ею поверхности, получим, согласно исследованиям Буссинеско [2], новый вид уравнения (2), получившее название гидродинамического уравнения Сен-Венана, которое после уточнения выражения для коэффициента гидравлического сопротивления и введения в рассмотрение уклона водной поверхности потока I, имеет следующий вид:

$$\frac{\alpha_0}{g}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\alpha}{g}v\frac{\partial v}{\partial x} = I - \frac{v^2}{C^2 H}, \tag{3}$$

где α_0 и α — коэффициенты Буссинеска и Кориолиса; C — коэффициент Шези; H — глубина потока.

Согласно закону Ньютона сила трения, которой пропорционально последнее слагаемое в (3), определяется только при равномерном движении потока по обтекаемой им поверхности. Поэтому мы обязаны в уравнении Сен-Венана (3) в последнем слагаемом записать скорость при равномерном движении потока, а именно v_p, а не текущее значение скорости v. Далее, в этом уравнении — левая его часть пропорциональная силе инерции, есть разница двух физических сил — тяжести и трения, которым как уже сказали, соответствуют скорости v и v_p. Поэтому, по аналогии с этими скоростями для определения силы инерции должны ввести в рассмотрение новую скорость движения жидкости, а именно

$$v_v = v - v_p \tag{4}$$

и, следовательно, в названных выше уравнениях в слагаемых, отражающих «силу инерции», должен стоять значок скорости v_v, а не v. Скорость v_v представляет собой скорость продвижения вдоль оси x изолинии скорости потока $v = f(x, t)$, носящей название характеристики [1, 3, 10]. С помощью этой линии она определится через тангенс угла ее наклона к оси x: $v_v = dx/dt = \operatorname{tg}\varphi$. Нами также предлагается для ее определения эмпирическая формула, полученная на основании измеренных данных на р. Тверце [5]:

$$v_v = \alpha_{1\text{п,с}}\, i_p\, \Delta I, \tag{5}$$

где $\alpha_{1\text{п,с}}$ — коэффициент, характеризующий нестационарность потока при его прохождении через створ реки и соответствующий периодам подъема уровня воды ($\alpha_{1\text{п}}$) — лобовая часть волны ($\Delta I > 0$) и спада ($\alpha_{1\text{с}}$) — тыловая часть волны ($\Delta I < 0$); $\Delta I = I - i_p$; i_p — уклон водной поверхности потока при его равномерном движении при глубине H, при которой и наблюдается нестационарное движение жидкости с уклоном I.

С учетом сказанного, гидродинамическое уравнение Сен-Венана (3) примет вид:

$$\frac{\alpha_0}{g}\frac{\partial v_v}{\partial t} + \frac{\alpha}{g} v_v \frac{\partial v_v}{\partial x} = I - \frac{v_p^2}{C^2 H}. \tag{6}$$

При этом следует заметить, что совместное решение (3) и (4) неправомерно вследствие принятия недеформируемости элементарного объема $v = dx\,dy\,dz$, рассматриваемого при выводе уравнений Навье–Стокса. Такую подстановку можно осуществлять только в уравнении неразрывности, решаемом совместно с уравнением (6), например, в задаче о распространении вдоль реки паводочной волны.

Теперь покажем справедливость записи (4) на натурном материале исследования движения жидкости в реке.

Если выполним измерение скорости течения воды в некотором сечении реки при различных глубинах H, при которых наблюдается равномерное движение потока, то получим однозначную кривую $v_p = f(H)$. А если при этих же глубинах рассмотрим неустановившееся движение потока при различных уклонах I (рис. 1), то получим для него ряд петлеобразных кривых скоростей. Эти кривые будут суть попусков различной интенсивности из водохранилища, как например, из Новотверецкого на р. Тверца [5] или прохождения по реке паводочных волн за ряд лет. На рис. 2 показана схема одной из таких кривых, а на рис. 3 эпюры измеренных по глубине потока скоростей при глубине H на упомянутой р. Тверце при равномерном и неустановившемся движениях. Эти эпюры скоростей достаточно хорошо описываются разработанной нами параболической формулой следующего вида [3]:

$$v = v_p \pm v_v = \left(C\sqrt{H\,i_p} \pm \alpha_{1\text{п,с}}\, i_p\, \Delta I\right)\left(\frac{\eta}{0{,}4}\right)^{1/m}, \tag{7}$$

где η — относительная глубина потока, отсчитываемая от дна; $m = 6$ — показатель степени для турбулентного потока. Если будем оперировать со средними скоростями по глубине потока в реке, то (7) примет вид:

$$v_{\text{ср}} = v_{p_{\text{ср}}} \pm v_{v_{\text{ср}}} = C\sqrt{H\,i_p} \pm \alpha_{1\text{п,с}}\, i_p\, \Delta I, \tag{8}$$

где первое слагаемое справа от знака равенства определяется по формуле Шези, а второе по формуле (5). Выявлено хорошее совпадение измеренных и рассчитанных скоростей потока по формулам (7) и (8), что говорит о правильности принятых нами предпосылок уточнения определения в уравнениях Рейнольдса и Сен-Венана сил трения и инерции в случае турбулентного режима движения жидкости. При ламинарном режиме ее движения и особенно в переходной зоне от ламинарного к турбулентному движению решение рассматриваемой задачи существенно усложнится в связи с зависимостью силы трения жидкости о подстилающую её поверхность от скорости движения этой жидкости (см. соответствующие графики Никурадзе и Зегжды [4, 8]).

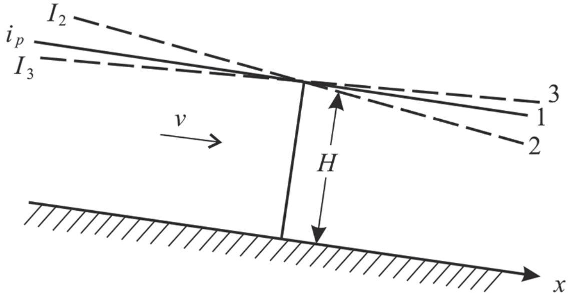

Рис. 1. Продольное сечение водного потока в реке. Водная поверхность соответственно: *1* — при равномерном; *2* — ускоренном; *3* — замедленном движениях потока жидкости

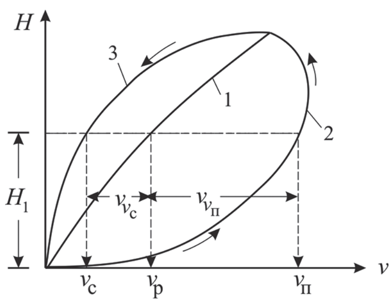

Рис. 2. Схематическое изображение кривых средней скорости потока в сечении реки: *1* — при равномерном; *2* –ускоренном; *3* — замедленном движениях потока жидкости

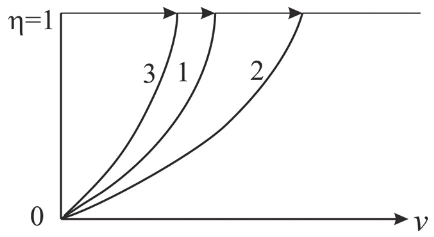

Рис. 3. Эпюры скорости на вертикали при глубине реки H и трех положениях водной поверхности: *1* — при равномерном; *2* — ускоренном; *3* — замедленном движениях потока жидкости; η — относительная глубина потока

В заключении отметим, что уточнение определения скоростей, характеризующих силу трения и инерции в дифференциальном уравнении (3), описывающем движение вязкой жидкости, позволяет рассчитать распространение паводочной волны по реке или волны, образовавшейся при прорыве плотины с использованием системы уравнений Сен-Венана без упрощения гидродинамического уравнения (6), входящего в нее, а также выполнить и уточнить решение многих других гидравлических задач [3].

Возвращаясь теперь к упомянутой выше работе [9], следует задаться вопросом, а действительно ли найдено универсальное решение уравнений Навье–Стокса? Ведь движение вязкой жидкости отличается многообразием структурных форм: прямолинейное в канале, на его повороте, при расширении или сужении, в трубопроводе прямолинейное или винтовое, пространственное в ячейке Бенара или Ленгмюра, разноплотностное и др. Для них и необходимо записывать уравнения движения. В этом случае мы будем иметь дело с массой жидкости в некотором объеме, который в уравнениях Навье–Стокса исчез из рассмотрения, а их слагаемыми стали не силы, а ускорения, записанные для точки. Поэтому неизвестно, к какому по форме телу применяется уравнение, к тому же, механика, как известно, не оперирует с ускорениями. А оперирует с силами. Этим и внесена неопределенность в описание движения рассматриваемой жидкости. Следовательно, необходимо иметь дело с *элементами структурных форм* течения жидкости, для которых и должны записывать уравнения: движения, моментов сил, неразрывности, ортогональных плоскостей их ограничивающих — для пространственной задачи (линий тока для плоской задачи).

Итак, законы механики должны применять только к формам течения, контурами которых являются ортогональные плоскости или линии тока двухмерной задачи. При движении жидкости они изменяются вдоль координат x, y, z. Величина этого изменения характеризуется в дифференциальных уравнениях движения слагаемыми, носящими название конвективных ускорений.

Литература

1. *Белевич М.Ю.* Математические методы решения океанологических задач. — СПб.: РГГМУ, 2008. — 191 с.
2. *Бобылев Д.* Очерк теории водных течений, выработанной Буссинеском. — СПб.: Типография Ю.Н. Эрлих, 1898. — 188 с.
3. *Винников С.Д.* Исследование кинематики неустановившегося речного потока. — СПб.: РГГМУ, 2013. — 104 с.

4. *Зегжда А.П.* Гидравлические потери на трение в каналах и трубопроводах. — Л.: Госстройиздат, 1957. — 276 с.
5. Исследования неустановившегося движения воды на реках Тверца и Оредеж. — Л.: Гидрометеоиздат, 1963. — 252 с.
6. *Караушев А.В.* Речная гидравлика. — Л.: Гидрометеоиздат, 1969. — 416 с.
7. *Ладыженская О.А.* Решение «в целом» краевой задачи для уравнений Навье–Стокса в случае двух пространственных переменных. // Доклады АН СССР, 1958, т. 123, № 3, с. 427–429.
8. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. — М.: «Наука», 1978. — 736 с.
9. *Мухтарбай Отелбаев*. Существование сильного решения уравнения Навье–Стокса. // Математический журнал, 2013, т. 13, № 4(50), с. 5–104.
10. *Турчак Л.И., Плотников П.В.* Основы численных методов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 304 с.