

М.В. Шмакова

ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ РЕЧНЫХ ПОТОКОВ

M.V. Shmakova

THE HYDRAULIC RESISTANCES IN MATHEMATICAL MODELLING OF THE RIVER FLOWS

В статье рассматриваются гидравлические сопротивления в потоке воды и их математическое описание в гидродинамических моделях. Вклад сопротивления дна потоку меняется в зависимости от изменения гидравлических характеристик потока. Это иллюстрируют расчеты по математической модели движения воды и твердого вещества.

Ключевые слова: гидравлические сопротивления, вязкость, математическая модель речного потока.

The hydraulic resistances in the water flow and their mathematical description in hydrodynamic models are presented in this article. The contribution of the bottom flow resistance varies with changes in the hydraulic characteristics of the stream. This is illustrated by the calculation of the flow of water movement and solid based on mathematical model.

Key words: hydraulic resistances, viscosity, mathematical model of the river flow.

Основные положения

Водный поток — это масса воды, движущаяся под действием силы тяжести по направлению уклона в выраженных понижениях земной поверхности.

Речной поток отличается следующее:

1. Основной движущей силой потока является сдвигающая проекция силы тяжести.
2. Наиболее значимые характеристики водного потока: глубина и скорость потока, уклон дна и расход наносов.
3. Водному потоку противодействуют силы, связанные как со свойствами потока (вязкость), так и со свойствами подстилающей поверхности (шероховатости, геоморфметрические параметры).
4. Движение воды сопровождается диссипацией энергии — переходом кинетической энергии в тепловую.
5. Выделяют три режима движения воды в речном потоке: ламинарное, переходное, турбулентное.

В потоке действуют силы, направленные на уменьшение скорости движения жидкости: сила вязкости, сила преодоления потоком неровностей подстилающей поверхности, сила преодоления морфометрической неоднородности русла. Действие этих сил взаимосвязано между собой — при уменьшении вязкости уменьшается сопротивление потока неровностям подстилающей поверхности. И, в свою очередь, при преодолении

неровностей подстилающей поверхности и морфометрической русловой неоднородности температура воды незначительно повышается, что приводит к незначительному же уменьшению вязкости.

Соотношение между силами зависит от таких характеристик, как уклон подстилающей поверхности (речного ложа), наличие в водном потоке движущихся твердых частиц, температуры воды, геометрических параметров потока, неровностей подстилающей поверхности, степени морфометрической неоднородности русла и многих других.

Рассмотрим влияние этих характеристик:

1. Уклон дна определяет основную движущую силу потока — сдвигающую проекцию силы тяжести. Чем больше уклон дна, тем больше вклад величины сдвигающей проекции силы тяжести, что увеличивает скорость движения потока и, соответственно, уменьшает его глубину.
2. Неровности дна приводят к уменьшению движущейся силы потока за счёт затрат на обтекание этих неровностей, что приводит к увеличению глубины потока. Очевидно, что более шероховатые поверхности вносят больше сопротивления, уменьшают скорость течения и увеличивают глубину потока.
3. Морфометрическая неоднородность русла приводит к перераспределению величин и направлений векторов скоростей. Как правило, это сопровождается общим уменьшением скорости движения потока и увеличением глубины. «На формирование неравномерного поля скоростей и образование циркуляции поток затрачивает некоторую энергию ... — местные гидравлические потери на поворот русла. Также изгиб русла увеличивает длину русла, т.е. увеличиваются суммарные гидравлические потери по длине» [7]. Прежде всего, под морфометрической неоднородностью русла подразумевается его плановая неоднородность.
4. Движение жидкости сопровождается повышением температуры, что приводит к уменьшению вязкости. В результате глубина потока уменьшается. Обычно это влияние крайне незначительно.
5. Величина силы сопротивления, обусловленная донными неровностями, возрастает с увеличением смоченного периметра.

Таким образом, основной силой, действующей со стороны подстилающей поверхности, является сила сопротивления, определяемая физико-механическими свойствами грунта, слагающего дно, наличием неровностей дна, плановой формой русла и наличием иных препятствий в русле.

Основной силой, действующей внутри потока, является сила вязкости:

1. Чем более вязкая жидкость, тем более сопротивление потоку со стороны самой жидкости и тем больше глубина потока.
2. Вязкость жидкости обеспечивает конечную глубину потока даже при самых больших скоростях течения при отсутствии действия внешних факторов.
3. На обтекание донных неровностей более вязкой жидкостью скорость движения потока уменьшается значительней, чем при обтекании неровностей жидкостью меньшей вязкости. Соответственно, глубина более вязкой жидкости больше.
4. Повышение температуры жидкости приводит к уменьшению силы вязкости, повышению скорости движения потока, уменьшению глубины и уменьшению

гидравлической крупности частиц. «В равнинных реках, аллювий которых представлен мелкими и тонкими песками, следует ожидать понижения транспортирующей способности потока при повышении температуры воды» [7].

Итак, в потоке воды основной движущей силой является сдвигающая проекция силы тяжести. Ей противодействуют две силы, обуславливающие сопротивление потока со стороны самой жидкости (вязкость) и со стороны дна (шероховатость и морфометрия русла).

Важно отметить, что вклад этих сил в скорость движения потока различен. Наибольший вклад в уменьшение скорости движения потока приносит сила, обусловленная неровностями дна. Соизмерима с ней сила, определяемая плановыми русловыми неоднородностями.

Сила вязкости обычно мала по сравнению со сдвигающей силой тяжести потока и силами сопротивления со стороны ложа, что часто в упрощенных расчётах позволяет ее не учитывать. Однако в двух- и трехмерных гидродинамических моделях необходимо вводить функцию взаимодействия между вертикальными и горизонтальными слоями жидкости, что дает возможность учесть обмен импульсами между слоями жидкости. Выражение для силы трения между слоями движущейся жидкости может быть представлено в виде формулы Ньютона [3]:

$$F = \mu S \frac{\partial v}{\partial h},$$

где μ — динамический коэффициент вязкости, кг/(м·с); S — площадь соприкосновения слоев, м²; $\partial v/\partial h$ — градиент скорости, (м/с)/м.

При взаимодействии движущегося потока и поверхности русла (дна и берегов) возникает сила трения (или касательное напряжение, если силу трения отнести к площади взаимодействия). Антуаном Шези в 1769 г. была получена формула для оценки касательных напряжений на стенках русла, применяемая в настоящее время к потокам в открытых руслах

$$\tau = \rho g \frac{v^2}{C^2},$$

где ρ — плотность жидкости, кг/м³; g — ускорение свободного падения, м/с²; v — средняя скорость потока, м/с; C — коэффициент Шези, м^{0,5}/с.

Очевидно, что коэффициент Шези определяется многими факторами. Возможно, это стало причиной того, что существует несколько сотен эмпирических формул расчета коэффициента Шези и множество способов оценки параметра шероховатости, входящего в формулу расчета этого коэффициента.

Оценка влияния формы поперечного сечения на пропускную способность русла проводилась многими исследователями (А.А. Маастик, С.Х. Абальянц, В.Н. Гончаров, Г.В. Железняков, М.А. Мостков и др.). Очевидно, что при увеличении величины смоченного периметра увеличивается сопротивление русла движению воды. Однако

исследователи отмечают, что в целом форма сечения не влияет на сопротивление движения воды в условиях гладких русел.

В сопротивление формы русла свой вклад вносят русловые мезоформы: острова, излучины, осередки и т.д. Сопротивление формы в открытых потоках может быть описано посредством формулы Буссинеска [2]:

$$I_f = -\beta \frac{\partial v^2}{2g\partial l},$$

где I_f — отнесенная к единице веса жидкости фиктивная сила добавочного сопротивления расширяющихся водоводов, $(\text{кг м/с}^2)/\text{кг}$; β — коэффициент добавочного сопротивления расширяющихся русел, м/с^2 ; v — средняя скорость в поперечном сечении, м/с ; l — продольная координата, м .

Причем, $\beta > 0$ при $(\partial v^2/\partial l) < 0$ и $\beta = 0$ при $(\partial v^2/\partial l) \geq 0$.

В [2] замечено, что добавочное сопротивление, создаваемое изгибом русла, невелико (в среднем составляет около 10 % от сопротивления цилиндрического русла) и что в основном оно создается побочным, формирующемся у выпуклого берега.

К.В. Гришанин [2] выделяет три вида шероховатости:

- 1) шероховатость зернистой поверхности дна;
- 2) шероховатость, создаваемая валунами;
- 3) шероховатость русловых микроформ: рифелей и гряд.

Два последних образования представляют собой плохо обтекаемые тела, так как за их тыловой стороной образуются зоны отрыва. Это, а также переменные во времени геометрические характеристики рифелей и гряд представляют сложность математического описания поведения потока при взаимодействии с двумя последними видами шероховатости. «...при возникновении донных гряд (мезоформ) сопротивление движению потока возрастает в 2–7 раз (по лабораторным данным)» [4].

В.С. Кнороз получил зависимость коэффициента сопротивления формы гряд от их относительной высоты [1]:

$$\tau_r = 0,2 \left(\frac{d_r}{R} \right)^{1,25},$$

где d_r — высота гряды, м ; R — гидравлический радиус, м .

Математическое представление гидравлического сопротивления в гидродинамических моделях, как правило, сводится к коэффициенту трения между подстилающей поверхностью и речным потоком. Это представление, с одной стороны, удобно тем, что в одном члене уравнения, в одном множителе сведена вся информация о взаимодействии русловых неровностей и потока. Однако, с другой стороны, очевидно, что эта связь многофакторная и нелинейная. Поэтому сводить ее описание в один коэффициент трения представляется некорректным. Одним из вариантов описания взаимодействия руслового потока и неровностей дна может быть сравнительно детализированное представление механики этого процесса. При этом важно принимать во внимание:

- процесс следует рассматривать в рамках принятого пространственно-временного масштаба;
- количественную оценку силы сопротивления дна потоку можно получить непосредственно из физико-механических свойств донного грунта.

Такой подход проиллюстрирован в математической модели движения воды и твердого вещества [5, 6, 7]. Основное уравнение модели получено на основании баланса сил, действующих в потоке. Параметры модели — угол внутреннего трения и сила сцепления частиц грунта между собой — определяются физико-механическими свойствами грунта, а величины этих параметров представлены в строго определенных диапазонах.

Основное уравнение математической модели движения воды и твердого вещества в речном потоке имеет вид [5, 6]:

$$(1-f) \left(mg \left[I - \frac{\partial H}{\partial L} \right] \right) - N_{act} m_{ч} \frac{dv_{ч}}{dt} + N_{act} m_{ч} g - cS = 0, \quad (1)$$

где f — коэффициент внутреннего трения, б/р; m — масса объема воды, заключенного между двумя расчетными створами, кг; g — ускорение свободного падения, м/с²; I — уклон дна; H — глубина потока, м; L — расстояние, м; v — скорость потока, м/с; t — время, с; N_{act} — количество перемещаемых частиц в потоке; $m_{ч}$ — масса частицы, кг; $v_{ч}$ — скорость движения частицы, м/с; c — сцепление частиц грунта при сдвиге, кг/(м·с²); S — площадь приложения силы, м².

Уравнение движения воды и твердого вещества замыкается уравнениями неразрывности потока, равнодействующей скорости движения частиц и баланса кинетической энергии потока воды и твердого вещества.

Расчеты

Представим количественную оценку доли вклада сил сопротивления, действующих в потоке по результатам расчетов по математической модели движения воды и твердого вещества (1) на основании данных экспериментов на гидравлическом лотке [8].

Уравнение (1) представлено силами, действующими в водном потоке:

$F_{т.пот.}$ — сдвигающая проекция силы тяжести потока;

$F_{ин.пот.}$ — силы инерции движущегося объема воды;

$F_{т.акт.ч.}$ — удерживающая проекция силы тяжести, действующая на частицы наносов, движущиеся в потоке;

$F_{сопрот.}$ — сила сопротивления частиц грунта сдвигу;

$F_{ин.акт.ч.}$ — сила инерции частиц, движущихся в потоке.

Дополним уравнение (1) силой вязкости $F_{вязкости}$.

В связи с тем, что эксперименты проходили в стеклянном лотке без наносов, влияние сил, действующих на движущиеся частицы, не учитывается. Расчет проводился

для равномерного установившегося движения. Таким образом, баланс сил расписывается следующим образом:

$$F_{\text{т.пот.}} - F_{\text{сопрот.}} - F_{\text{вязкости}} = 0,$$

а уравнение (1) примет вид:

$$(1 - f)mgI - cS - \mu S \frac{\partial v}{\partial h} = 0.$$

В табл. 1 приведены доли вклада сил внешнего (сопротивление со стороны дна) и внутреннего (сила вязкости) сопротивления для водного потока в нескольких характерных экспериментах в стеклянном лотке. Данные экспериментов в стеклянном лотке здесь и ниже предоставлены А.Н. Кондратьевым [8].

Таблица 1

Доли вклада сил внешнего и внутреннего сопротивления в характерных экспериментах в стеклянном лотке (ширина $B = 0,838$ м) в условиях установившегося режима

Характеристика	Номер эксперимента					
	1	2	3	4	5	6
Уклон лотка I , ‰	0,0046	0,0046	0,0022	0,0022	0,0011	0,0011
Расход воды Q , л/с	0,6	18,2	0,4	23,9	0,6	25
Глубина H , см	0,62	3,56	0,48	4,96	1,42	6,46
Доля вклада сил сопротивления, %						
$F_{\text{сопрот. дна}}$	93,9	99,0	84,3	98,9	89,3	98,9
$F_{\text{вязкости}}$	6,1	1,0	15,7	1,1	10,7	1,1

Как видно из табл. 1, для потоков в стеклянном лотке вклад сил вязкости крайне незначительный. Основной вклад сил приходится на сопротивление дна потоку. Причем, для одинаковых уклонов при увеличении расхода воды вклад силы вязкости уменьшается, для одинаковых расходов воды с увеличением уклона вклад силы вязкости в общее сопротивление также уменьшается.

На основании данных экспериментов, приведенных в табл. 2, построены зависимости (рис. 1–3) доли вклада силы вязкости (%) в гидравлическое сопротивление потока от расхода воды для различных уклонов.

Расчетные точки на рис. 1–3 аппроксимируют аналитические степенные функции. Из анализа приведенных графиков следует, что с увеличением расхода вклад силы вязкости в общее сопротивление потока и потоку уменьшается и асимптотически выходит на ноль.

Таблица 2

Глубины в лотке при равномерном установившемся движении потока в стеклянном лотке при заданных расходах воды и уклонах дна [8]

Уклон дна и потока $I = 0,0046$		Уклон дна и потока $I = 0,0022$		Уклон дна и потока $I = 0,0010$	
Расход воды, л/с	Глубина потока, см	Расход воды, л/с	Глубина потока, см	Расход воды, л/с	Глубина потока, см
0,6	0,62	0,4	0,48	0,6	0,82
1,2	0,87	1,1	0,88	1,8	1,42
2,6	1,20	2,1	1,24	2,2	1,63
3,6	1,44	3,9	1,68	3,4	1,97
4,3	1,58	5,7	2,07	4,5	2,34
4,7	1,71	7,3	2,48	5,7	2,65
5,9	1,88	9,4	2,86	6,7	2,93
7,1	2,09	11,5	3,20	8,6	3,42
8,1	2,22	14,1	3,59	10,1	3,77
9,2	2,41	15,6	3,88	12,3	4,18
10,3	2,60	17,6	4,12	14,4	4,66
12,3	2,85	19,7	4,42	16,1	5,00
14,7	3,10	21,6	4,68	19,1	5,45
16,3	3,33	23,9	4,96	20,8	5,73
18,2	3,56			23,0	6,22
20,2	3,79			25,0	6,46
21,8	3,92			26,8	6,79

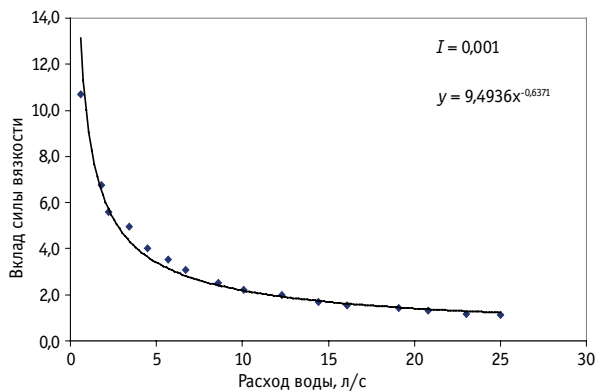


Рис. 1. Зависимость доли вклада силы вязкости в общее сопротивление, % от расхода воды, л/с для уклона $I = 0,001$

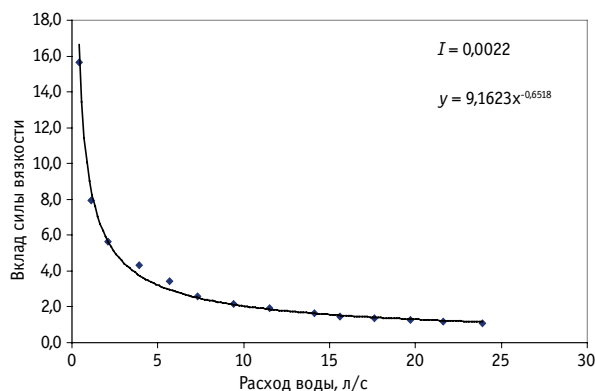


Рис. 2. Зависимость доли вклада силы вязкости в общее сопротивление, % от расхода воды, л/с для уклона $I = 0,0022$

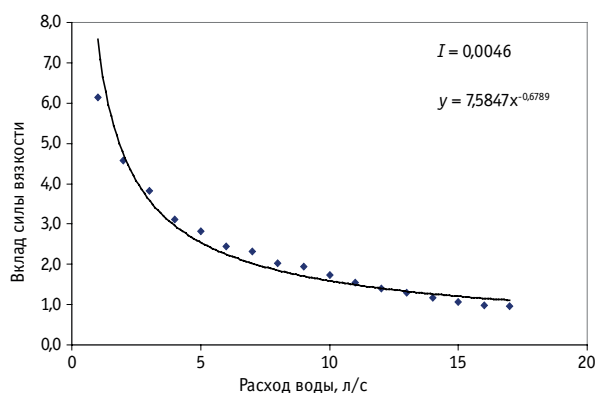


Рис. 3. Зависимость доли вклада силы вязкости в общее сопротивление, % от расхода воды, л/с для уклона $I = 0,0046$

Выводы

Таким образом, на основе результатов экспериментов на лотках и расчетов по математической модели движения воды и твердого вещества было проиллюстрировано разделение гидравлического сопротивления водного потока на две составляющие: внешнюю (сопротивление со стороны дна) и внутреннюю (сила вязкости). Полученные на основании экспериментов графики продемонстрировали вклад силы вязкости в общее сопротивление потока. В результате расчетов по математической модели получено численное значение доли вклада внешнего (сила трения, сопротивление дна потоку) и внутреннего (сила вязкости, сопротивление внутри потока) гидравлических сопротивлений.

Литература

1. *Барышников Н.Б., Попов И.В.* Динамика русловых потоков и русловые процессы. — Л.: Гидрометеоиздат, 1988. — 456 с.
2. *Гришанин К.В.* Гидравлическое сопротивление естественных русел. — СПб.: Гидрометеоиздат, 1992. — 184 с.
3. *Дмитриевский В.И.* Гидромеханика. — М.: «Морской транспорт», 1962. — 296 с.
4. *Знаменская Н.С.* Гидравлическое моделирование русловых процессов. — Л.: Гидрометеоиздат, 1992. — 240 с.
5. *Шмакова М.В.* Теория и практика математического моделирования речных потоков. — СПб: Лема, 2013. — 142 с.
6. *Шмакова М.В.* Расчет заносимости русловых карьеров. // Учёные записки РГГМУ, 2012, № 26, с. 71–75.
7. Эрозионные процессы. Под ред. Н.И. Маккавеева и Р.С. Чалова. — М.: Мысль, 1984. — 256 с.
8. *Kondratyev A.N.* Distribution of bedload alluviums discharge on width of riverbed at passing mesoform. // NATO ARW, Stochastic models of hydrological processes and their applications to problems of environmental preservation, Moscow, 1998, pp. 236–238.