А.В. Васильев, А.Д. Кузнецов, И.Н. Мельникова

АППРОКСИМАЦИЯ МНОГОКРАТНО РАССЕЯННОГО СОЛНЕЧНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В РАМКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ОДНОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

A.V. Vasilev, I.N. Melnikova, A.D. Kuznetsov

APPROXIMATION OF MULTIPLY SCATTERED SOLAR RADIATION IN THE FRAMEWORK OF A SINGLE SCATTERING

В статье предлагается применять приближение однократного рассеяния света в атмосфере для расчета радиационных характеристик. Учет вклада многократности рассеяния осуществляется поправочным добавочным коэффициентом. Рассмотрены различные параметризации добавочного коэффициента: нулевая, линейная и степенная от величины произведения оптической толщины на вероятность выживания кванта, а также полные параметризации, учитывающие его зависимость от всех исходных параметров задачи. Анализ точности различных параметризаций выявил область оптических свойств атмосферы и геометрии освещения, для которых предложенный подход обеспечивает результаты с заданной точностью.

Ключевые слова: численное моделирование, надирные оптические измерения, однократное и многократное рассеяние, параметризация.

The paper proposes to use the approach of a single light scattering in the atmosphere to calculate the radiation characteristics. It is taken into account the contribution of multiple scattering with special correction coefficient. Different parameterization of the coefficient are considered: zero, linear and power dependence from the product of the optical thickness on the probability of quantum survival as well as complete parameterization, taking into account its dependence on the problem initial parameters. Analysis of the accuracy of different parameterizations identifies ranges of the atmosphere optical properties and illumination geometry, for which the proposed approach provides results with a given accuracy.

Key words: numerical modeling, nadir optical measurements, single and multiple scattering, parameterization.

Введение

Численное моделирование оптических измерений в атмосферах Земли и планет в настоящее время является важнейшей составной частью разработки алгоритмов интерпретации данных дистанционного зондирования атмосферы и поверхности [1–3]. При этом возникает противоречие между всевозрастающими требованиями к точности вычислений, адекватности их реальности и временем расчетов, необходимых для выполнения указанных требований. В частности, в задачах моделирования рассеяния солнечного излучения в атмосфере время расчетов на несколько порядков возрастает для алгоритмов, строго учитывающих многократное рассеяние света. Целью данной работы является разработка метода вычислений, реализующего определенный компромисс между высокой скоростью расчетов в приближении однократного рассеяния света и их высокой точностью с учетом многократного рассеяния. Отметим, что даже в случае облачной атмосферы для расчета коэффициента отражения может рассматриваться случай однократного рассеяния [4–6].

Многократное рассеяние как поправка к однократному

Как показано в теории [1, 2] и как очевидно из простых физических соображений, учет многократного рассеяния всегда приводит к увеличению интенсивности (или потока) излучения на любой оптической глубине τ в атмосфере по сравнению с приближением однократного рассеяния. Это можно записать в виде

$$I(\tau) = I_1(\tau)(1 + \alpha), \qquad (1)$$

где $I_1(\tau)$ — интенсивность в приближении однократного рассеяния; $I(\tau)$ — интенсивность с учетом многократного рассеяния; $\alpha > 0$ — некий поправочный коэффициент.

Сразу отметим, что в монохроматическом случае значение интенсивности $I_1(\tau)$ для любых современных схем расчета в оптически неоднородной атмосфере вычисляется простым интегрированием в соответствующих пределах по высоте [2, 7], то есть, с учетом возможностей современных компьютеров, практически мгновенно.

Диапазон, в котором меняется значение поправочного коэффициента α, зависит от конкретной задачи. Рассмотрим, например, стандартную и широко распространенную схему надирного зондирования безоблачной атмосферы и поверхности в видимом диапазоне спектра [8]. Из модельных расчетов известно, что в этом случае вклад многократно рассеянного излучения составляет 10–30 % (в зависимости от оптических параметров атмосферы и поверхности). Следовательно, даже просто положив в (1) $\alpha = 0{,}1$, мы, скорее всего, улучшим точность приближения однократного рассеяния в смысле среднеквадратической ошибки по совокупности возможных вариаций параметров атмосферы и поверхности. То есть всего лишь простая «подгонка из общих соображений» может оказаться достаточно эффективной. В данной работе поправочный коэффициент α рассматривается как функция оптических параметров атмосферы, что, во-первых, позволяет более точно оценивать вклад многократного рассеяния в конкретных задачах, во-вторых, дает возможность использовать рассматриваемую функцию в реальных расчетах.

Модель переноса излучения

Ради минимизации параметров, от которых зависит коэффициент α, используем простейшую модель плоской оптически однородной атмосферы [9]. Для нее задаются оптическая толщина τ_0, альбедо однократного рассеяния ω_0, индикатрису рассеяния аппроксимирует функция Хэньи-Гринстейна:

$$x(\gamma)=\frac{1-g^2}{\left(1+g^2-2g\cos\gamma\right)^{3/2}}, \quad (2)$$

где γ — угол рассеяния; g — средний косинус рассеяния — единственный параметр, определяющий индикатрису. Поверхность считается изотропно отражающей, и отражение от нее определяется величиной альбедо A.

Рассмотрим интенсивность отраженного и рассеянного солнечного излучения при визировании из космоса. Тогда, помимо описанных выше четырех параметров атмосферы и поверхности, необходимо задать еще три: косинус зенитного угла солнца η_0, косинус надирного угла визирования η, азимут визирования относительно направления солнечного излучения φ.

Для рассматриваемого случая в приближении однократного рассеяния имеем [1–3]:

$$I_1=\eta_0\frac{\omega_0 x(\gamma)}{4(\eta_0+\eta)}\left\{1-\exp\left[-\tau_0\left(\frac{1}{\eta_0}+\frac{1}{\eta}\right)\right]\right\}+\eta_0 A\exp\left[-\tau_0\left(\frac{1}{\eta_0}+\frac{1}{\eta}\right)\right], \quad (3)$$

где I_1 — интенсивность излучения в приближении однократного рассеяния в единицах, соответствующих внеатмосферному потоку πS на перпендикулярную лучам площадку при $S = 1$ (то есть внеатмосферный поток равен π);

$$\cos\gamma=-\eta_0\eta+\sqrt{\left(1-\eta_0^2\right)\left(1-\eta^2\right)}\cos\varphi. \quad (4)$$

Первое слагаемое в (3) есть интенсивность рассеяния без учета отражения, второе — добавка отраженного от поверхности излучения. Остановимся на ней подробнее. Как известно [1, 2], интенсивность отраженного от изотропной поверхности излучения есть $(A/\pi)F^{\downarrow}$, где $F^{\downarrow}$ — падающий на поверхность поток, на верхней границе атмосферы это дает $(A/\pi)F^{\downarrow}\exp(-\tau_0/\eta)$. Однако для вычисления $F^{\downarrow}$ необходимо интегрирование по направлениям, для которого даже в случае однократного рассеяния не могут быть получены явные аналитические выражения. Поэтому, чтобы не иметь проблем с неопределенностями численного интегрирования (выбор квадратурной формулы и ее узлов), примем для $F^{\downarrow}$ простейшее выражение $F^{\downarrow}=\pi S\eta_0\exp(-\tau_0/\eta_0)$, что в рассмотренных выше единицах и приводит к виду второго слагаемого в выражении (3).

Таким образом, выражение (3), является простейшим видом приближения однократного рассеяния, не требующим углового интегрирования для учета отражения от поверхности. Это, конечно, снижает его точность, но зато позволяет написать явную алгебраическую формулу для вычислений.

Итак, в общем случае в рассматриваемой модели поправочный коэффициент α в формуле (1) является функцией семи переменных: τ_0, ω_0, g, A, η_0, η, φ. В качестве первого этапа ее параметризации рассматривается случай надирных измерений ($\eta = 1$). Тогда имеем пять параметров: τ_0, ω_0, g, A, η_0.

Для расчета коэффициента α использован компьютерный код SCATRD [7]. Интенсивность многократно рассеянного излучения рассчитывается по методу Монте-Карло, причем именно как добавка к приближению однократного рассеяния. То есть однократно рассеянное излучение рассчитывалось по формуле (3), а кратности высших порядков — по методу Монте-Карло.

Банк данных поправочных коэффициентов

Для расчетов было выбрано по десять значений оптических параметров τ_0, ω_0, g и A и девять значений косинуса зенитного угла солнца η_0 согласно табл. 1.

Таблица 1

Численные значения оптических параметров и косинуса зенитного угла солнца, принятые для расчетов

τ_0	0,01	0,05	0,12	0,18	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
ω_0	0,1	0,6	0,8	0,9	0,92	0,94	0,96	0,98	0,99	0,999
g	10^{-5}	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
A	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
η_0	–	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0

Выбор значений соответствует возможным вариациям оптических параметров безоблачной атмосферы в коротковолновой области спектра, причем именно для тех случаев, когда вклад многократного рассеяния априори еще не слишком велик (этим условием определяется граница расчетов $\tau_0 = 0{,}5$). Результаты расчетов коэффициента α оформлены в виде специального файла с возможностью его загрузки в компьютер и программной реализации функции $\alpha(\tau_0, \omega_0, g, A, \eta_0)$ с практически мгновенной скоростью выборки.

Параметризации поправочного коэффициента

Далее, естественно, попытаться параметризовать полученную функцию $\alpha(\tau_0, \omega_0, g, A, \eta_0)$ аналитическим выражением, более удобным для практического использования, чем файл с банком данных. Приведем сначала общий обзор предлагаемых аппроксимаций и введем для них соответствующие обозначения, а потом рассмотрим и сравним их результаты.

<u>Нулевые параметризации</u>. Имеет смысл рассмотреть случай $\alpha \equiv 0$, чтобы определить границы применимости приближения однократного рассеяния. Обозначим эту аппроксимацию как C0. Другим очевидным случаем нулевой аппроксимации является глобальное усреднение параметра α, обозначим ее как C1.

<u>Физико-математические параметризации</u>. Доля рассеянного излучения определяется, прежде всего, значением произведения $\tau_0\omega_0$, причем при стремлении его к нулю параметр α также должен становиться нулевым. Таким образом, простейшей линейной параметризацией PL1 является функция

$$\alpha = p_1 \tau_0 \omega_0, \tag{5}$$

где p_1 — коэффициент, подлежащий определению. Можно предположить не линейный, а степенной характер зависимости — параметризацию PP1:

$$\alpha = (\tau_0 \omega_0)^{p_1}, \tag{6}$$

Далее можно усложнять зависимости вида выражений (5), (6), добавляя свободные члены, степени второго и следующих порядков. Следующим этапом будет рассмотрение коэффициентов указанных зависимостей, как функций остальных параметров. Однако, по сравнению с приведенными простейшими случаями, последовательное усложнение соотношений, очевидно, является техническим этапом и само по себе не представляет интереса. Поэтому в итоге приведем сразу финальный вариант, наилучший в плане точности аппроксимации, и обозначим его PLm.

Полные параметризации. Назовем таковыми те, что включают все пять параметров. Простейшей подобной параметризацией является линейная регрессия, однако, она фактически оказалась частным случаем параметризации PLm. Следующим вариантом полной параметризации будет нелинейная регрессия NWL — нейронная сеть с пятью входами и одним выходом [10]. Подробности будут описаны ниже. Наконец, наилучшей аппроксимацией банка данных является сам банк FB — линейная интерполяция по нему как искомая функция $\alpha(\tau_0, \omega_0, g, A, \eta_0)$ (см. выше).

Результаты параметризаций

Параметризация C0. Для нее имеет смысл определение границ приближения однократного рассеяния по заданной точности. Зададимся значениями 10; 3 и 1 %. Причем будем рассматривать как среднеквадратичные (СКО), так и максимальные отклонения. Как отмечено выше, физически рассеяние определяется параметром $\tau_0 \omega_0$, то есть имеет смысл находить максимальные значения этого произведения, соответствующие заданной точности. В практическом плане границы выполнения приближения однократного рассеяния имеет смысл искать при фиксации параметров, которые известны при измерениях. К таковым отнесем косинус зенитного угла солнца η_0. Результаты оценок приведены в табл. 2.

Как и следовало ожидать, точность приближения однократного рассеяния увеличивается по мере роста η_0, хотя имеются исключения, возможно связанные с дискретностью сетки расчетов, а может и с особенностями аналитического приближения однократного рассеяния (3). При невысоких требованиях к точности вычислений приближение однократного рассеяния вполне применимо.

Параметризация C1. По результатам расчетов имеем $\alpha = 0{,}76$ (глобальное среднее). Столь большая величина вызвана значительными (в разы) отличиями интенсивности многократно рассеянного излучения от приближения однократного рассеяния при больших рассматриваемых значениях $\tau_0 \omega_0$. Такое α не имеет смысла использовать в формуле (1), поскольку оно слишком неточно для предельно малых $\tau_0 \omega_0$ (более 70 % отличия от приближения однократного рассеяния), а для больших $\tau_0 \omega_0$ его погрешность велика вследствие проявления зависимости от других параметров. Таким образом, глобальное усреднение поправочного коэффициента практического смысла не имеет.

Таблица 2

Максимальные значения произведения $\tau_0\omega_0$, для которых погрешность приближения (среднеквадратическая и максимальная) однократного рассеяния не хуже заданной (при визировании в надир)

η_0	Точность					
	10 % СКО	10 % max	3 % СКО	3 % max	1 % СКО	1 % max
0,2	0,025	0,018	0,006	0,005	0,001	0,001
0,3	0,035	0,018	0,006	0,005	0,001	0,001
0,4	0,035	0,025	0,008	0,005	0,001	0,001
0,5	0,04	0,025	0,0092	0,006	0,001	0,001
0,6	0,04	0,025	0,0094	0,005	0,001	0,001
0,7	0,045	0,025	0,0098	0,005	0,001	0,001
0,8	0,045	0,008	0,0096	0,005	0,001	0,001
0,9	0,045	0,025	0,012	0,005	0,001	<0,001
1,0	0,046	0,025	0,012	0,005	0,001	0,001

Параметризация PL1. По результатам подбора коэффициента α по методу наименьших квадратов (МНК) [10] имеем для формулы (5) $p_1 = 3{,}66$. Глобальная (по всей совокупности данных) погрешность этой аппроксимации: среднеквадратическая — 18 %, максимальная — 77 %. Поскольку точность физической параметризации должна расти с уменьшением параметра $\tau_0\,\omega_0$, для PL1 имеет смысл провести такой же анализ предельных значений параметра, как и выше для C0. Результаты приведены в табл. 3.

Следует отметить, что здесь зависимость от η_0 уже не носит однозначного характера, что, очевидно, связано со сложной зависимостью рассеяния от неучтенных в PL1 параметров (η_0, A, g).

Таблица 3

Максимальные значения произведения $\tau_0\omega_0$, для которых погрешность приближения PL1 (среднеквадратическая и максимальная) однократного рассеяния не хуже заданной (визирование в надир)

η_0	Точность					
	10 % СКО	10 % max	3 % СКО	3 % max	1 % СКО	1 % max
0,2	0,072	0,035	0,025	0,009	0,006	0,001
0,3	0,144	0,035	0,03	0,0092	0,00999	0,005
0,4	0,144	0,035	0,018	0,008	0,00999	0,005
0,5	0,12	0,035	0,018	0,006	0,0096	0,001
0,6	0,12	0,035	0,018	0,006	0,006	0,001
0,7	0,096	0,035	0,018	0,006	0,006	0,001
0,8	0,072	0,0096	0,012	0,005	0,008	0,001
0,9	0,0499	0,035	0,012	0,0096	0,008	0,001
1,0	0,0499	0,035	0,012	0,008	0,006	0,001

Параметризация PP1. По результатам подбора коэффициента α по МНК имеем для формулы (8) $p_1 = 0{,}635$. Глобальная (по всей совокупности данных) погрешность этой аппроксимации: среднеквадратическая — 24 %, максимальная — 86 %. Таким образом, параметризация PP1, во-первых, в среднем хуже, чем PL1, во-вторых, является нелинейной, что затрудняет ее дальнейшее уточнение. Поэтому для продолжения работы параметризация PL1 была выбрана за базовую.

Параметризация PLm. Она получена из параметризации PL1 по формуле (5) путем последовательного учета зависимости коэффициента p_1 от параметров модели. Подбор параметров проводился в интерактивном режиме добавления членов, сначала линейных, потом с более сложными зависимостями. Коэффициенты зависимости подбирались по МНК. Для дальнейшего усложнения сохранялись члены, обеспечивающие значимое снижение погрешности аппроксимации. На последнем этапе были подобраны степени у коэффициентов аппроксимации. Окончательно получен следующий вид параметризации PLm:

$$\alpha = \Big[1{,}85 - 1{,}61A^{1,5} + 5{,}33g^{1,1} + 2{,}43\eta_0 - 4\tau_0 + 1{,}65\omega_0^{2,8} + 1{,}45\left(A\eta_0\right)^{0,6} + \\ + 1{,}11\frac{A}{\eta_0} - 6{,}31g\eta_0 - 2{,}06\omega_0\eta_0 + 11\left(g\tau_0\right)^{1,4} + 1{,}19\left(\frac{Ag}{\eta_0}\right)^{1,6}\Big]\left(\tau_0\omega_0\right)^{1,25}. \qquad (7)$$

Среднеквадратическая погрешность учета вклада многократного рассеяния по формуле (7) 5,3 %, максимальная — 53 %. Отметим, что параметризация (7) может быть улучшена путем добавления новых членов и модификаций степеней существующих. Однако из опыта получения выражения (7) следует, что такие улучшения дадут выигрыш в точности лишь на десятые доли процентов СКО, что уже не имеет практического смысла. Точность 5 % для простой линейной параметризации (7) следует признать весьма хорошей, учитывая, что разные методы расчетов интенсивности рассеянного излучения с учетом многократного рассеяния различаются между собой в результатах на несколько процентов [11]. Поскольку окончательная параметризация сохраняет физический смысл (пропорциональность $\tau_0\,\omega_0$), для нее проведен аналогичный анализ предельных значений параметра, который представлен в табл. 4.

Как и следовало ожидать, линейная параметризация (7) может быть применена при невысоких требованиях к точности вычислений; при высоких она неэффективна.

Нелинейная регрессия — нейронная сеть NWL. Для параметризации коэффициента α применяется нейронная персептронная сеть [10] с пятью входами (τ_0, ω_0, g, A, η_0) и одним выходом (α), в скрытом слое использовались 10 нейронов. В результате получена точность параметризации по СКО 6,9 %, максимальная — 49 %. Однако следует учесть, что нейронная сеть минимизирует среднюю относительную погрешность коэффициента α, то есть лучше работает в области больших значений α и хуже — малых (что видно по низкой максимальной погрешности). В качестве выхода из этой ситуации рассмотрим, учитывая (7), аппроксимацию нейронной сетью выражения, стоящего в скобках в выражении (7), то есть значения $\alpha/(\tau_0\,\omega_0)^{1,25}$. В результате получаем следующее выражение:

$$\alpha = \left[\frac{\psi(s) - 0{,}03841}{0{,}01411}\right]\left(\tau_0\omega_0\right)^{1{,}25}, \qquad (8)$$

где $\psi\left(x\right) = \dfrac{1}{1 + \exp\left(-x\right)}$; $s = 2{,}927 + \sum_{i=1}^{10} v_i \psi\left(-w_{i0} + w_{i1}\tau_0 + w_{i2}\omega_0 + w_{i3}g + w_{i4}A + w_{i5}\eta_0\right).$

Таблица 4

Максимальные значения произведения $\tau_0\omega_0$, для которых погрешность приближения PLm (среднеквадратическая и максимальная) однократного рассеяния не хуже заданной (визирование в надир)

η_0	Точность					
	10 % СКО	10 % max	3 % СКО	3 % max	1 % СКО	1 % max
0,2	0,3	0,045	0,012	0,006	0,001	0,001
0,3	0,3	0,05	0,025	0,005	0,005	0,001
0,4	0,5	0,035	0,045	0,005	0,005	0,001
0,5	0,5	0,048	0,045	0,006	0,005	0,001
0,6	0,5	0,035	0,045	0,005	0,005	0,001
0,7	0,5	0,025	0,045	0,005	0,005	0,001
0,8	0,5	0,0096	0,05	0,005	0,005	0,001
0,9	0,5	0,035	0,045	0,006	0,005	0,001
1,0	0,5	0,035	0,045	0,006	0,005	0,001

Коэффициенты используемой здесь нейронной сети приведены в табл. 5.

Таблица 5

Коэффициенты нейронной сети

i	v_i	w_{i0}	w_{i1}	w_{i2}	w_{i3}	w_{i4}	w_{i5}
1	−7,037	−0,6091	1,414	1,551	−0,1154	−0,1278	1,893
2	−2,290	−0,6290	−0,5191	−0,7395	0,1317	−19,75	−6,154
3	−3,008	−0,2623	3,183	0,7616	−2,109	−1,573	−2,202
4	1,638	2,458	−1,942	−0,2300	0,6392	0,04578	5,225
5	6,049	1,785	−27,47	−0,5381	−0,1246	0,4646	0,1045
6	4,060	−0,6041	3,266	1,064	−1,247	−1,045	−3,502
7	0,4891	3,143	−1,705	3,035	0,8972	2,101	−2,472
8	7,222	2,210	−15,76	−0,05820	0,4074	−26,50	−0,3339
9	0,3394	11,70	1,468	−0,9000	14,63	2,187	−0,8047
10	4,938	9,296	3,497	2,624	5,080	0,8667	−7,851

Следует отметить, что погрешность параметризации по формуле (8) оказалась по СКО 3,2 % (это уже весьма хорошая точность!) и максимальная ошибка 63 %. Для параметризации (8), как и выше, приводим табл. 6, где отражена область ее безусловного действия.

Таблица 6

Максимальные значения произведения $\tau_0\omega_0$, для которых погрешность приближения NWL (среднеквадратическая и максимальная) однократного рассеяния не хуже заданной (визирование в надир)

η_0	Точность					
	10 % СКО	10 % max	3 % СКО	3 % max	1 % СКО	1 % max
0,2	0,5	0,2	0,166	0,009	0,03	0,005
0,3	0,5	0,2	0,2	0,035	0,0499	0,005
0,4	0,5	0,15	0,25	0,008	0,05	0,005
0,5	0,5	0,166	0,3	0,006	0,045	0,005
0,6	0,5	0,119	0,18	0,006	0,04	0,005
0,7	0,5	0,096	0,225	0,006	0,04	0,005
0,8	0,5	0,0096	0,166	0,005	0,0096	0,005
0,9	0,5	0,046	0,12	0,0096	0,045	0,001
1,0	0,5	0,046	0,108	0,008	0,035	0,001

Параметризация по базе данных (DB). Ей в рамках приводимых оценок формально следует присвоить нулевые погрешности, реальные же определяются машинной точностью округления в формуле (1).

Заключение

Предложенное представление интенсивности многократно рассеянного излучения, как добавление поправки к приближению однократного рассеяния в конкретных задачах, может существенно ускорить расчеты, а следовательно, расширить круг их практических приложений, в частности, при интерпретации данных дистанционного зондирования. Возможна оценка значения поправочного параметра исходя из особенностей решаемых задач. Кроме того, для тех задач, где область вариаций параметров существенно уже, предложенный подход позволяет рассчитать собственную базу данных поправок и ее параметризаций. При этом точность этих параметризаций может быть значительно повышена по сравнению с данной работой за счет указанного сужения диапазона вариаций оптических параметров атмосферы и поверхности.

По результатам данного исследования можно предложить три пути улучшения приближения однократного рассеяния для расчета интенсивности:

- после предварительного анализа доли многократного рассеяния в интенсивности излучения поправочное слагаемое α выбирается приблизительно в диапазоне вариаций вклада многократного рассеяния независимо от оптических параметров и геометрии задачи;
- использовать предложенные в данной работе параметризации поправочного параметра α, выбирая их в зависимости от геометрии освещения (зенитного угла солнца);
- рассчитать банк данных для конкретной задачи, результаты можно параметризовать, следуя результатам данной работы [общий вид формул (5)–(8)], и использовать для расчетов интенсивности. Точность параметризаций, построенных для

конкретной задачи, повысится, если будет рассматриваться более узкий диапазон вариаций оптических параметров.

На данном этапе рассмотрен случай надирного визирования. В дальнейшем предполагается осуществить переход к общему случаю произвольного угла и азимута визирования.

Литература

1. *Минин И.Н.* Теория переноса излучения в атмосферах планет. — М.: Наука, 1988. — 264 с.
2. *Тимофеев Ю.М., Васильев А.В.* Теоретические основы атмосферной оптики. — СПб.: Наука, 2003. — 474 с.
3. *Васильев А.В., Кузнецов А.Д., Мельникова И.Н.* Дистанционное зондирование окружающей среды из космоса. — СПб.: изд. БГТУ, 2008. — 133 с.
4. *Melnikova I.N., Dlugach Zh.M., Nakajima T., Kawamoto K.* Calculation of the reflected function of an optically thick scattering layer for a Henyey-Greenstein phase function // Applied Optics, 2000, vol. 39, pp. 4195–4204.
5. *Коновалов Н.В.* Некоторые свойства коэффициента отражения оптически толстой среды. Препринт ИПМ РАН. — М., 1997.
6. *Гения М.Д., Кузнецов А.Д., Мельникова И.Н., Гатебе Ч.* Результаты обработки самолетных измерений интенсивности рассеянной солнечной радиации в облачной атмосфере // Учёные записки РГГМУ, 2013, № 27, с. 77–93.
7. *Васильев А.В.* Численное моделирование интенсивности многократно рассеянного солнечного излучения и производных от нее с учетом сферической геометрии атмосферы (компьютерный код SCATRD) // Вестник СПбГУ, сер. 4: Физика, химия, 2006, вып. 3, с. 3–14.
8. *Тимофеев Ю.М.* Глобальная система мониторинга параметров атмосферы и поверхности. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2010. — 129 с.
9. *Васильев А.В., Мельникова И.Н.* О множественности решений обратной задачи определения оптических параметров рассеивающей атмосферы по дистанционным измерениям // Оптика атмосферы и океана, 2009, т. 22, № 2, с. 155–162.
10. *Васильев А.В. Мельникова И.Н.* Методы прикладного анализа результатов натурных измерений в окружающей среде. — СПб.: изд. БГТУ, 2009. — 369 с.
11. Перенос радиации в рассеивающих и поглощающих атмосферах: стандартные методы расчета / Под ред. Ж. Ленобль / Пер. с англ. — Л.: Гидрометеоиздат, 1990. — 263 с.