В.Н. Веретенников

АНАЛИЗ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ РАСЧЕТА ЭКВАТОРИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ

V.N. Veretennikov

ANALYSIS OF COMPUTATIONAL SNABILITY OF THE DIFFERENCE SCHEME FOR CALCULATING THE EQUATORIAL CURRENTS

Для исследования океанических процессов в экваториальной зоне (эволюции поля скорости течения, температуры и солености в неоднородном океане) используется система уравнений для параметра Россби, значительно превышающего 1 ($R_0 \gg 1$). Система уравнений решается приближенно методом сеток. При аппроксимации дифференциальных уравнений разностным уравнением вводится произвольный параметр σ, ($\sigma \in [0; 1]$), что позволяет получить однопараметрическое семейство схем. С помощью параметра σ можно управлять устойчивостью и точностью схемы.

Ключевые слова: экваториальная зона, эволюция, параметр Россби, метод сеток, аппроксимация, разностное уравнение, однопараметрическое семейство схем, матрица перехода, характеристическое уравнение, собственные значения, устойчивость, точность.

For the study of oceanic processes in the equatorial zone (the evolution of the field of flow rate, temperature and salinity in the inhomogeneous ocean) uses a system of equations for the Rossby parameter, well above 1. The system of equations is solved approximately by the grid method. When approximating differential equations difference equation introduces an arbitrary parameter that allows you to get a one-parameter family of schemes. With the help of the parameter can be controlled by the stability and accuracy of the circuit.

Key words: equatorial zone, evolution, the Rossby parameter, grid method, approximation, differential equation, one-parameter family of schemes, transition matrix, characteristic equation, eigenvalues, stability, accuracy.

После географического открытия глубинных экваториальных противотечений в Тихом, Атлантическом и Индийском океанах проблемы экваториальной циркуляции стали одними из центральных в океанологии. Подробное описание экваториального противотечения в Атлантическом океане (течение Ломоносова) можно найти в работах сотрудников Морского гидрофизического института АН СССР [1, 2].

Теоретические модели как однородного, так и неоднородного океана в экваториальной зоне можно разбить на два направления: модели, использующие линейную постановку задачи, и нелинейную. Хотя все авторы, исходящие из линейных уравнений движения, приходят к выводу, что необходим учет нелинейных инерционных членов. Из нелинейных моделей представляет интерес работа Саркисяна и Серебрякова [3, 4]. Учитывая, что во многих работах схема расчета для начального приближения не учитывает нелинейные члены, что не является вполне обоснованным, в данной работе сделана попытка обойти указанное затруднение.

Рассмотрим следующую задачу: пусть на поверхности океана, находящегося в состоянии покоя, начиная с некоторого момента времени $t \geq 0$, начинает действовать касательное напряжение ветра; требуется исследовать океанические процессы в экваториальной зоне — эволюции поля скорости течения, температуры и солености в неоднородном океане.

В работе используется стандартная система координат, у которой начало координат находится на экваторе, ось Ox направлена на восток, ось Oy — на север, ось Oz — вертикально вниз от невозмущенной поверхности океана.

Для решения этой задачи будем пользоваться системой уравнений для параметра Россби, значительно превышающего 1 ($R_0 \gg 1$). Данному значению R_0 отвечает узкая экваториальная зона (0°; ±0,5°). Экваториальная зона несколько расширяется, включая часть области океана, где $R_0 \approx 1$.

Следовательно, в приближенных основных уравнениях движения необходимо учитывать члены, отражающие эффект отклоняющей силы вращения Земли.

Далее осуществляется переход к новым безразмерным переменным, которые определяются следующим образом: $x = x_1$, $y = M\eta$, $z = z_1$, $t = t_1$, где M — граница экваториальной зоны океана.

Следуя Веронису [5], предполагается симметрия относительно экватора для функций u, w и асимметрия для функции υ. Это позволяет искать решение в виде:

$$(u; w) = \sum_{n=0}^{\infty} (u_{2n}; w_{2n}) \eta^{2n}, \quad \upsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \upsilon_{2n+1} \eta^{2n+1}. \tag{1}$$

При этом в пределах экваториальной зоны очевидно, что $\eta \in [0; 1]$. После перехода к новым переменным, приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях η, получим систему уравнений, которые можно считать, как нулевое и так далее приближения. Аналогично можно получить граничные и начальные условия.

В дальнейшем для простоты ограничимся рассмотрением системы для нулевого приближения ($n = 0$). Поскольку узкая экваториальная зона океана представляет собой зональный поток, распространяющийся в невращающемся бассейне, в котором меридиональная составляющая скорости мала ($\upsilon = 0$), то это не вызовет больших погрешностей (так как при этом отбрасываются малые слагаемые). Для простоты в дальнейшем опускаются индексы у зависимых и независимых переменных.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u\frac{\partial \varphi}{\partial x} + w\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$
$$\frac{\partial \varsigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^H u\,dz = 0, \quad \rho = p_a + \rho_0 g\left(\varsigma + \int_0^H \varphi\,dz\right), \tag{2}$$

$$t = 0: \quad u = w = 0, \ \varphi = \varphi_0(z), \ \varsigma = 0, \tag{3}$$

$$t>0: \quad \text{при } z=0: \quad p=p_a, \ \rho_0\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\tau_x, \ w=-\frac{\partial\xi}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^z u\,dz, \ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=\Gamma, \tag{4}$$

$$\text{при } z=H: \quad u=w=0, \ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=0, \tag{5}$$

$$\text{при } x=0,L: \quad u=0, \ \frac{\partial\varphi}{\partial x}=0, \tag{6}$$

где u, υ, w — составляющие вектора скорости; p — давление; ρ — плотность; ρ_0 — постоянное значение плотности; g — ускорение силы тяжести; T — температура; S — соленость морской воды; $\varphi = -\alpha T + c_1 S$; α, c_1 — известные постоянные; ς — возвышение уровня океана по сравнению с невозмущенным состоянием; ν, κ — коэффициенты вертикальной турбулентной вязкости и диффузии тепла и солей; p_a — атмосферное давление на поверхности океана; τ_x — касательное напряжение ветра, воздействующее на поверхность океана; Γ — заданная величина; H — глубина океана.

Система решается приближенно методом сеток. Для этого область непрерывного изменения аргументов (x; z; t) заменяется дискретным множеством точек (узлов сетки). При этом вместо функций непрерывных аргументов (u; w; φ; ς; ρ) рассматриваются функции дискретных аргументов, определенных в узлах сетки (сеточные функции). Далее строится на отрезке $x \in [0; L]$ сетка $x_i = ih_x$ $(0 \le i \le \ell)$ с шагом $h_x = L/\ell$, на отрезке $z \in [0; H]$ сетка $z_j = jh_z$ $(0 \le j \le n)$ с шагом $h_z = H/n$ и сетка Δt на отрезке $t_k \in [0; t_c]$, где t_c — момент времени, когда течение установится. Принимается, что $u(x_i; z_j; t_k) = u_{ij}^k$ и аналогично для остальных искомых функций.

Первые производные по переменным x, z аппроксимируются центральными разностными отношениями, производная по t правосторонним разностным отношением. Вводя произвольный вещественный параметр σ (вес верхнего слоя), получаем однопараметрическое семейство схем:

$$\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{\Delta t}+\sigma\left[\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij}^{k+1}+\left(w\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{ij}^{k+1}-\left(\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{ij}^{k+1}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{ij}^{k}-(1-\sigma)\left[\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij}^{k}+\left(w\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{ij}^{k}-\left(\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{ij}^{k}\right], \tag{7}$$

$$\frac{\varphi_{ij}^{k+1}-\varphi_{ij}^{k}}{\Delta t}+\sigma\left[\left(u\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{ij}^{k+1}+\left(w\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{ij}^{k+1}-\left(\kappa\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)_{ij}^{k+1}\right]=$$

$$=(1-\sigma)\left[\left(u\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{ij}^{k}+\left(w\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{ij}^{k}-\left(\kappa\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)_{ij}^{k}\right], \tag{8}$$

$$\frac{\varsigma_{i}^{k+1}-\varsigma_{i}^{k}}{\Delta t}+\sigma\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{i}^{k+1}=-(1-\sigma)\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{i}^{k}, \tag{9}$$

$$p_{ij}^{k} = p_{ai}^{k} + \rho g\left(\varsigma_{i}^{k} + J_{ij}^{k}\right), \tag{10}$$

где $1 \le i \le \ell - 1; \quad 1 \le j \le n - 1; \quad k = 1, 2, \ldots; \quad S = \int_0^H u dz; \quad J = \int_0^z u dz.$

С помощью параметра σ можно управлять устойчивостью и точностью схемы. Вычислительную устойчивость сеточных уравнений исследовать трудно, поскольку уравнения нелинейные. Однако имеет смысл исследовать вычислительную устойчивость линеаризированных уравнений. Для этой цели используется следующая система уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial u}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_0 g \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{13}$$

Здесь $\bar{u}$, $\bar{w}$ означает соответственно среднюю горизонтальную и вертикальную составляющие скорости, которые являются постоянными.

Если искать решение по пространственным переменным в виде $\exp[i(k_1 x + k_2 z)]$, где волновое число k_1 относится к составляющей колебаний в направлении оси Ox, а k_2 представляет собой волновое число для составляющей колебаний в направлении оси Oz, то сеточный аналог системы окончательно имеет вид

$$\begin{gathered}
U^{k+1}\left[1+\sigma\left(iA+\nu K\right)\right] = U^{k}\left[1-\left(1-\sigma\right)\left(iA+\nu K\right)\right] - iP^{k}N, \\
-i\sigma bP^{k+1} + \sigma G\varphi^{k+1} = \left(1-\sigma\right)ibP^{k} - G\left(1-\sigma\right)\varphi^{k}, \\
\sigma aU^{k+1} + b\sigma W^{k+1} = -\left(1-\sigma\right)aU^{k} - \left(1-\sigma\right)bW^{k}, \\
\varphi^{k+1}\left[1+\sigma\left(iA+\kappa K\right)\right] = \varphi^{k}\left[1-\left(1-\sigma\right)\left(iA+\kappa K\right)\right].
\end{gathered} \tag{14}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$a = \frac{\sin k_1}{h_x}, \quad b = \frac{\sin k_2}{h_z}, \quad A = \Delta t\left(a\bar{u} + b\bar{w}\right), \quad K = \Delta t\frac{\sin^2(k_2/2)}{(h_z/2)^2}, \quad G = \rho_0 g, \quad N = a\Delta t/\rho_0 .$$

Вводя для простоты последующих выкладок дополнительные обозначения

$$\alpha = iA + \nu K, \quad \beta = iA + \kappa K, \quad B = 1 + \sigma\alpha, \quad C = 1 + \sigma\beta, \quad S = \left(1-\sigma\right)\beta - 1, \quad D = \left(1-\omega\right)\alpha - 1,$$

система записывается в матричном виде

$$\begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma G & -i\varpi b \\ \sigma a & \sigma b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U^{k+1} \\ W^{k+1} \\ \varphi^{k+1} \\ P^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D & 0 & 0 & -iN \\ 0 & 0 & -(1-\sigma)G & i(1-\sigma)b \\ -(1-\sigma)a & -(1-\sigma)b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U^{k} \\ W^{k} \\ \varphi^{k} \\ P^{k} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что эта матричная система преобразуется к виду:

$$\begin{pmatrix} U^{k+1} \\ W^{k+1} \\ \phi^{k+1} \\ P^{k+1} \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} U^{k} \\ W^{k} \\ \phi^{k} \\ P^{k} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где **A** есть матрица перехода, которая является функцией физических параметров a, b, A, K, G, N:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -B/A & 0 & 0 & iN/B \\ \dfrac{a}{b}\left(\dfrac{D}{B} - \dfrac{1-\sigma}{\sigma}\right) & -\dfrac{1-\sigma}{\sigma} & 0 & \dfrac{iNa}{bB} \\ 0 & 0 & -S/C & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{G}{ib}\left(\dfrac{1-\sigma}{\sigma} - \dfrac{S}{C}\right) & -\dfrac{1-\sigma}{\sigma} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Собственные значения матрицы **A** являются корнями характеристического уравнения $|\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}| = 0$. Для нахождения собственных значений необходимо предварительно определить коэффициенты характеристического полинома [6]. Поскольку все выкладки не представляют большого затруднения, то запись их опускается. Характеристическое уравнение после несложных преобразований принимает вид

$$\left(\lambda + \frac{1-\sigma}{\sigma}\right)^2 \left[\lambda^2 + \left(\frac{D}{B} + \frac{S}{C}\right)\lambda + \frac{DS}{BC}\right] = 0. \tag{17}$$

Откуда находим собственные значения матрицы:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma - 1}{\sigma},$$

$$\lambda_3 = \frac{\left[(1+\sigma\nu K)^2 + A^2\sigma^2\right] - \nu K(1+\sigma\nu K) - A^2\sigma + iA}{(1+\sigma\nu K)^2 + A^2\sigma^2},$$

$$\lambda_4 = \frac{(1+\sigma\kappa K)^2 + A^2\sigma^2 - \kappa K(1+\sigma\kappa K) - A^2\sigma + iA}{(1+\sigma\kappa K)^2 + A^2\sigma^2}. \tag{18}$$

Необходимое условие вычислительной устойчивости состоит в том, чтобы собственные значения характеристического уравнения не превосходили по абсолютной величине единицу.

Тогда для $\lambda_{1,2}$ имеем, что $\sigma > 0{,}5$, то есть параметр устойчивости $\sigma \in (0{,}5; 1)$.

Для λ_3 получаем следующее неравенство:

$$\left[A^2\sigma + \nu K\left(1+\sigma\nu K\right)\right]\left\{\left(1-2\sigma\right)\left[A^2\sigma + \nu K\left(1+\sigma\nu K\right)\right] - 2\left(1+\sigma\nu K\right)\right\} + A^2 \le 0.$$

Поскольку последнее неравенство довольно сложное, имеет смысл рассмотреть простейшие частные случаи, которые могут повлиять на вычислительную неустойчивость.

I. Исследование устойчивости при отсутствии переноса ($\bar{u} = \bar{w} = 0$).

В этом случае имеем $\nu K(1 + \sigma\nu K)^2 [(1 - 2\sigma)\nu K - 2] \le 0$. Из этого неравенства следует, что требование устойчивости выполнено, если

$$\sigma\left(1-2\sigma\right)\Delta t \frac{\sin^2\left(k_2/2\right)}{\left(h_z/2\right)^2} \le 2. \tag{19}$$

Откуда нетрудно установить, что при $\sigma > 0{,}5$ схема устойчива при любом положительном Δt, а при $\sigma < 0{,}5$ условие устойчивости

$$\Delta t \le \frac{h_z^2}{\nu\left(1-2\sigma\right)\sin^2\left(k_2/2\right)}. \tag{20}$$

Если имеет место последнее неравенство, то модуль λ_3 принимает максимальное значение при $k_2 = 0$ и $k_2 = 2\pi$, а минимальное значение при $k_2 = \pi$. Так как $k_2 = 2\pi h_z/h$, (где h — длина волны), то случай $k_2 = 2\pi$ соответствует $h = h_z$ и максимальному значению $|\lambda_3|$; случай $k_2 = \pi$ соответствует $h = 2h_z$ и при этом величина $|\lambda_3|$ минимальна. Это означает, что компонента с длиной волны h_z не будет затухать, в то время как составляющая с длиной волны $2h_z$ должна быстро исчезнуть. Поэтому при интегрировании на длительный срок для предложенной схемы очевидно, что составляющая с длиной волны h_z будет со временем преобладать (если параметр устойчивости $\sigma < 0{,}5$).

II. Исследование устойчивости при нулевой вязкости ($\nu = 0$, $\bar{u} \ne \bar{w} \ne 0$).

Если вязкость положить равной нулю, то имеем

$$\left(2\sigma-1\right)\left(A^2\sigma^2+1\right) \ge 0, \tag{21}$$

то есть при $\sigma > 0{,}5$ это неравенство всегда выполняется. Отсюда следует вывод, что при отсутствии вязкости схема является устойчивой.

Литература

1. *Колесников А.Г. и др.* Подповерхностное течение Ломоносова // Течение Ломоносова. — Киев: изд. АН УССР, 1966.
2. *Колесников А.Г. и др.* Открытие, экспериментальное исследование и разработка теории течения Ломоносова. — Севастополь: изд. МГИ АН СССР, 1968.
3. *Саркисян А.С., Серебряков А.А.* Результаты приближенных расчетов экваториального противотечения Ломоносова // Новые модели и результаты расчета течений в бароклинном океане. — Севастополь: изд. МГИ АН ССР, 1967.
4. *Саркисян А.С., Серебряков А.А.* Нестационарная модель экваториальных течений // Океанология, 1969, т. 9, вып. 1.
5. *Veronis G.* An approximate theoretical analysis of the equatorial undercurrent // Deep Sea Research, 1960, vol. 6, iss. 4.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967.