ГИДРОЛОГИЯ

М.Ю. Белевич

О «СПЕКТРАЛЬНОЙ» ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРОМЕХАНИКИ IV. «СПЕКТРАЛЬНАЯ» МОДЕЛЬ ЖИДКОСТИ И ВОЗМОЖНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

M.Yu. Belevich

ON THE “SPECTRAL” FORM OF THE FLUID MECHANICS EQUATIONS IV. THE “SPECTRAL” FLUID MODEL AND POSSIBLE APPLICATIONS

Последняя часть работы [1, 2, 3] посвящена получению «спектральных» уравнений модели жидкости и обсуждению возможных приложений разработанного подхода.

Ключевые слова: преобразование Фурье, интегральные преобразования, законы сохранения, спектральные уравнения.

The last part of the research [1,2,3] is devoted to derivation of the “spectral” equations of the fluid model and discussion of possible applications of developed approach.

Key words: Fourier transform, Integral transforms, conservation laws, spectral equations.

1. Описание массы (продолжение)

1.1. Преобразования базисов

1.1. Преобразования базисов

Для того чтобы записать интегральный закон сохранения меры $\overline{m} = \rho_L(\Omega^L) = \rho_E(\Omega^E)$, рассмотрим следующие прямые и обратные преобразования базисов.

перенумерация базисных векторов:		
P: $\rho_E \mapsto \rho_L$; $\Omega^L \mapsto \Omega^E$	эйлеров базис $\{e_x^E\} \leftrightarrow$	$\mathrm{P} = \Pi^{-1}$, $\mathrm{P}_x^X = \delta_{\xi^{-1}(x)}^X = \delta_x^{\xi(t,X)}$
Π: $\rho_L \mapsto \rho_E$; $\Omega^E \mapsto \Omega^L$	$\leftrightarrow$ лагранжев базис $\{e_X^L\}$	$\Pi = \mathrm{P}^*$, $\Pi_X^x = \delta_{\xi(t,X)}^x = \delta_X^{\xi^{-1}(x)}$
поворот базисных векторов:		
V: $\rho_L \mapsto r_L$; $\Theta^L \mapsto \Omega^L$	лагранжев базис $\{e_X^L\} \leftrightarrow$	$\mathrm{V} = \Lambda^{-1}$, $\mathrm{V}_X^K = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} e^{-iK(X)}\, dX$
Λ: $r_L \mapsto \rho_L$; $\Omega^L \mapsto \Theta^L$	$\leftrightarrow$ лагранжев базис $\{\varepsilon_K^L\}$	$\Lambda = \mathrm{V}^*$, $\Lambda_K^X = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} e^{iK(X)}\, dK$
поворот базисных векторов:		
G: $\rho_E \mapsto r_E$; $\Theta^E \mapsto \Omega^E$	эйлеров базис $\{e_x^E\} \leftrightarrow$	$\mathrm{G} = \mathrm{H}^{-1}$, $\mathrm{G}_x^k = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} e^{-ik(x)}\, dx$

H: $r_E \mapsto \rho_E;\quad \Omega^E \mapsto \Theta^E$	$\leftrightarrow$ эйлеров базис $\{\varepsilon_k^E\}$	$\mathrm{H} = \mathrm{G}^*,\quad \mathrm{H}_k^x = \dfrac{1}{(\sqrt{2pi})^3}\; e^{ik(x)}\, dk$
перенумерация базисных векторов:		
Q: $r_E \mapsto r_L;\quad \Theta^L \mapsto \Theta^E$	эйлеров базис $\{\varepsilon_k^E\} \leftrightarrow$	$\mathrm{Q} = \mathrm{R}^{-1},\quad \mathrm{Q}_n^K = \delta_n^{\lambda(t,K)}$
R: $r_L \mapsto r_E;\quad \Theta^E \mapsto \Theta^L$	$\leftrightarrow$ лагранжев базис $\{\varepsilon_K^L\}$	$\mathrm{R} = \mathrm{Q}^*,\quad \mathrm{R}_K^k = \delta_{\lambda(t,K)}^k$

Здесь значком ($*$) обозначены сопряженные преобразования. Таким образом, все преобразования унитарны и имеют место следующие соотношения (I – единичное преобразование):

$$
\begin{array}{lllllll}
\rho_L & = \mathrm{P}\rho_E & = \mathrm{PH}r_E & = \mathrm{PHR}r_L & = \mathrm{PHRV}\rho_L & \Rightarrow \mathrm{PHRV} & = \mathrm{I},\\
\Omega^L & = \mathrm{V}\Theta^L & = \mathrm{VR}\Theta^E & = \mathrm{VRH}\Omega^E & = \mathrm{VRHP}\Omega^L & \Rightarrow \mathrm{VRHP} & = \mathrm{I},\\
\rho_E & = \Pi\rho_L & = \Pi\Lambda r_L & = \Pi\Lambda\mathrm{Q}r_E & = \Pi\Lambda\mathrm{QG}\rho_E & \Rightarrow \Pi\Lambda\mathrm{QG} & = \mathrm{I},\\
\Omega^E & = \mathrm{G}\Theta^E & = \mathrm{GQ}\Theta^L & = \mathrm{GQ}\Lambda\Omega^L & = \mathrm{GQ}\Lambda\Pi\Omega^E & \Rightarrow \mathrm{GQ}\Lambda\Pi & = \mathrm{I},\\
r_L & = \mathrm{Q}r_E & = \mathrm{QG}\rho_E & = \mathrm{QG}\Pi\rho_L & = \mathrm{QG}\Pi\Lambda r_L & \Rightarrow \mathrm{QG}\Pi\Lambda & = \mathrm{I},\\
\Theta^L & = \Lambda\Omega^L & = \Lambda\Pi\Omega^E & = \Lambda\Pi\mathrm{G}\Theta^E & = \Lambda\Pi\mathrm{GQ}\Theta^L & \Rightarrow \Lambda\Pi\mathrm{GQ} & = \mathrm{I},\\
r_E & = \mathrm{R}r_L & = \mathrm{RV}\rho_L & = \mathrm{RVP}\rho_E & = \mathrm{RVPH}r_E & \Rightarrow \mathrm{RVPH} & = \mathrm{I},\\
\Theta^E & = \mathrm{H}\Omega^E & = \mathrm{HP}\Omega^L & = \mathrm{HPV}\Theta^L & = \mathrm{HPVR}\Theta^E & \Rightarrow \mathrm{HPVR} & = \mathrm{I}.
\end{array}
$$

1.2. Описание массы в пространстве τ–k

Переход от декартова базиса к базису Фурье в выражении для массы тела происходит, в соответствие с таблицей, следующим образом:

$$
\begin{array}{ccccc}
m^\tau = & \int_X \rho_L^{\tau X}\Omega_X^L & = \begin{array}{c}\int_X\int_K \rho_L^{\tau X}\mathrm{V}_X^K\Theta_K^L \\ \int_K\int_X r_L^{\tau K}\Lambda_K^X\Omega_X^L\end{array} = & \int_K r_L^{\tau K}\Theta_K^L & \\
 & \| & & \| & \\
 & \begin{array}{c}\int_X\int_x \rho_L^{\tau X}\Pi_X^x\Omega_x^E = \\ = \int_x\int_X \rho_E^{\tau x}\mathrm{P}_x^X\Omega_X^L\end{array} & & \begin{array}{c}\int_K\int_k r_L^{\tau K}\mathrm{R}_K^k\Theta_k^E = \\ = \int_k\int_K r_E^{\tau k}\mathrm{Q}_k^K\Theta_K^L\end{array} & \\
 & \| & & \| & \\
 & \int_x \rho_E^{\tau x}\Omega_x^E & = \begin{array}{c}\int_k\int_x r_E^{\tau k}\mathrm{H}_k^x\Omega_x^E \\ \int_x\int_k \rho_E^{\tau x}\mathrm{G}_x^k\Theta_k^E\end{array} = & \int_k r_E^{\tau k}\Theta_k^E, &
\end{array}
$$

или в бескоординатной форме

$$\begin{array}{ccccc}
\bar{m} = & \rho_L\left(\Omega^L\right) & = \dfrac{\rho_L\left(\mathrm{V}\Theta^L\right)}{\Lambda r_L\left(\Omega^L\right)} = & & r_L\left(\Theta^L\right) \\
& \| & & & \| \\
& \rho_L\left(\Pi\Omega^E\right) = & & & r_L\left(\mathrm{R}\Theta^E\right) = \\
& = \mathrm{P}\rho_E\left(\Omega^L\right) & & & = \mathrm{Q} r_E\left(\Theta^L\right) \\
& \| & & & \| \\
& \rho_E\left(\Omega^E\right) & = \dfrac{r_E\left(\mathrm{H}\Omega^E\right)}{\rho_E\left(\mathrm{G}\Theta^E\right)} = & & r_E\left(\Theta^E\right).
\end{array}$$

Нижние строки в этих таблицах дают соотношения для плотностей и форм объема:

$$\rho_E^{\tau x} = \int_k \mathrm{H}_k^x r_E^{\tau k} \Leftrightarrow \rho_E = \mathrm{H} r_E, \tag{1}$$

$$\Omega_x^E = \int_k \mathrm{G}_x^k \Theta_k^E \Leftrightarrow \Omega^E = \mathrm{G}\Theta^E. \tag{2}$$

Обозначая через $\lambda:(t, K) \mapsto k(t)$ преобразование лагранжевых координат в эйлеровы в пространстве τ–k и учитывая, что $\mathrm{R} = \mathrm{Q}^{-1}$, $\mathrm{Q}_n^K = \delta_n^{\lambda(t,\, K)}$ и $\mathrm{R}_K^k = \delta^k_{\lambda(t,\, K)}$, по аналогии с $\rho_L = \mathrm{P}\rho_E$ и $m^\tau = \int_X \rho_E^{\tau\xi(t,\, X)}\, \Omega_X^L$ (см. [3]) получим

$$r_L^{\tau K} = \int_k r_E^{\tau k} \mathrm{Q}_k^K = \int_k r_E^{\tau k} \delta_k^{\lambda(t,K)} = r_E^{\tau\lambda(t,K)}, \tag{3}$$

$$\Theta_K^L = \int_k \mathrm{R}_K^k \Theta_k^E = \int_k \delta^k_{\lambda(t,K)} \Theta_k^E = \Theta^E_{\lambda(t,K)}, \tag{4}$$

и далее

$$m^\tau = \int_K r_L^{\tau K} \Theta_K^L = \int_K r_E^{\tau\lambda(t,K)} \Theta^E_{\lambda(t,K)}. \tag{5}$$

Поскольку $\Theta_k^E = \Theta^E(k)dk$, $\Theta_K^L = \Theta^L(K)dK$, находим

$$\Theta^E_{\lambda(t,K)} = \Theta^E\left(\lambda(t,K)\right)d\lambda(t,K) = \Upsilon(t,K)\Theta^E\left(\lambda(t,K)\right)dK = \Theta^L(K)dK.$$

Откуда имеем

$$\Theta^L(K) = \Upsilon\Theta^E\left(\lambda(t,K)\right). \tag{6}$$

Здесь $\Upsilon(t, K) = \det(\partial_K \lambda(t, K))$ — якобиан соответствующего преобразования координат. Окончательно выражение для m^τ в пространстве τ–k выглядит следующим образом

$$m^\tau = \int_K r_E\left(\tau, \lambda(t,K)\right)\Upsilon\Theta^E\left(\lambda(t,K)\right)dK. \tag{7}$$

1.3. Связь между якобианами *J* и ϒ

Пользуясь приведенной выше таблицей преобразований базисов, запишем

$$\Theta_K^L = \int_X \Lambda_K^X \Omega_X^L, \quad \Omega_X^L = \int_K V_X^K \Theta_K^L.$$

В силу соотношений $\Omega^E = \Omega^L \mathrm{P}$ (см. [3]) и (4) имеем

$$\Theta_{\lambda(t,K)}^E = \int_X \Lambda_K^X \Omega_{\xi(t,X)}^E$$

или

$$\Theta^E\left(\lambda(t,K)\right)d\lambda(t,K) = \Upsilon\Theta^E\left(\lambda(t,K)\right)dK = \int_X \Lambda(X;K)J\Omega^E\left(\xi(t,X)\right)dXdK.$$

Таким образом,

$$\Upsilon\Theta^E\left(\lambda(t,K)\right) = \int_X \Omega^E\left(\xi(t,X)\right)\Lambda(X;K)JdX$$

и аналогично

$$J\Omega^E\left(\xi(t,X)\right) = \int_K \Theta^E\left(\lambda(t,K)\right)V(K;X)\Upsilon dK.$$

Производная якобиана J по параметру t равна (см. например, [5])

$$d_t J = J\mathrm{div}\vec{v}. \tag{8}$$

Здесь $\vec{v} \equiv (d_t \tau, d_t x) = (ic, d_t \xi(t, X))$ – вектор скорости, касательный к мировой линии. По аналогии с (8), производную якобиана ϒ по параметру t запишем как

$$d_t \Upsilon = \Upsilon\mathrm{div}\vec{\mathrm{v}}, \tag{9}$$

а коэффициент пропорциональности $\mathrm{div}\vec{\mathrm{v}}$ будем интерпретировать как дивергенцию векторного поля $\vec{\mathrm{v}} \equiv (d_t \tau, d_t k) = (ic, d_t \lambda(t, K))$, касательного к Фурье-образу мировой трубки. Здесь $\lambda(t, K)$ — траектория (мировая линия) в пространстве τ–k.

2. Законы сохранения

Рассмотрим теперь получение дифференциальных законов сохранения, для чего вычислим производную меры сечения мировой трубки m^τ по параметру t.

2.1. Сохранение массы

В первом случае интерпретируем меру как массу тела. Постулируем равенство нулю производной $d_t m^\tau$

$$d_t m^\tau = d_t \int_x \rho_E^{\tau x} \Omega_x^E = d_t \int_k r_E^{\tau k} \Theta_k^E = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d_t \overline{m} = d_t \rho_E\left(\Omega^E\right) = d_t r_E\left(\Theta^E\right) = 0,$$

и примем во внимание соотношение (7) и аналогичное соотношение

$$m^{\tau} = \int_X \rho_E\left(\tau, \xi(t,X)\right) J\,\Omega^E\left(\xi(t,X)\right) dX,$$

полученное в [3]. Тогда, с одной стороны,

$$d_t m^{\tau} = d_t \int_X \rho_E^{\tau\xi(t,X)} \Omega_X^L = d_t \int_X \rho_E\left(\tau, \xi(t,X)\right) \underbrace{J\,\Omega^E\left(\xi(t,X)\right) dX}_{\Omega_X^L} =$$

$$= \int_X d_t\left(\rho_E\left(\tau, \xi(t,X)\right) J\,\Omega^E\left(\xi(t,X)\right)\right) dX \overset{\left(\Omega^E = 1\right)}{=} \int_X d_t\left(\rho_E J\right) dX =$$

$$= \int_X J \operatorname{div}\left(\rho_E\left(\tau, \xi(t,X)\right) \vec{v}\left(\tau, \xi(t,X)\right)\right) dX =$$

$$= \int_X \operatorname{div}\left(\rho_E \vec{v}\right)^{\tau\xi(t,X)} \Omega_X^L = \int_x \operatorname{div}\left(\rho_E \vec{v}\right)^{\tau x} \Omega_x^E,$$

откуда, полагая $\operatorname{div}(\rho_E\,\vec{v})^{\tau x}$ непрерывным, получаем уравнение неразрывности в пространстве τ–x

$$\left(\operatorname{div}\left(\rho_E \vec{v}\right)\right)^{\tau x} = 0. \tag{10}$$

С другой стороны, в пространстве τ–k совершенно аналогично находим

$$d_t m^{\tau} = \int_K d_t\left(\Upsilon r_E^{\tau\lambda(t,K)}\right) \Theta_K^L = \int_K \Upsilon \operatorname{div}\left(r_E \vec{\mathrm{v}}\right)^{\tau\lambda(t,K)} \Theta_K^L =$$

$$= \int_K \operatorname{div}\left(r_E \vec{\mathrm{v}}\right)^{\tau\lambda(t,K)} \Theta_{\lambda(t,K)}^E = \int_k \operatorname{div}\left(r_E \vec{\mathrm{v}}\right)^{\tau k} \Theta_k^E,$$

откуда получаем уравнение неразрывности, записанное в терминах волновых чисел (т.е. индексов k)

$$\operatorname{div}\left(r_E \vec{\mathrm{v}}\right)^{\tau k} = 0. \tag{11}$$

Связь обоих уравнений можно получить из рассмотрения следующих равенств:

$$d_t m^{\tau} = \int_k \operatorname{div}\left(r_E \vec{\mathrm{v}}\right)^{\tau k} \Theta_k^E = \int_k \left(\int_x \mathrm{H}_k^x \Omega_x^E\right) \operatorname{div}\left(r_E \vec{\mathrm{v}}\right)^{\tau k} =$$

$$= \int_x \left(\int_k \operatorname{div}\left(r_E \vec{\mathrm{v}}\right)^{\tau k} \mathrm{H}_k^x\right) \Omega_x^E = \int_x \operatorname{div}\left(\rho_E \vec{v}\right)^{\tau x} \Omega_x^E.$$

Отсюда имеем

$$\operatorname{div}\left(\rho_E \vec{v}\right)^{\tau x} = \int_k \operatorname{div}\left(r_E \vec{\mathrm{v}}\right)^{\tau k} \mathrm{H}_k^x. \tag{12}$$

В гидродинамической литературе величину $\rho_E \vec{v}$ принято называть плотностью потока массы. При этом, очевидно, имеется в виду поток «по пространству». Тогда величину $r_E \vec{\mathrm{v}}$ естественно называть плотностью потока массы «по спектру» (пространственному).

2.2. Сохранение энергии

Интерпретируя меру $\overline{m}$ как энергию сечения мировой трубки, можно теперь записать все полученные выше выражения в терминах плотности энергии. Именно в силу того, что $|\vec{v}| = 1$ всюду на мировой трубке, $\rho_E^{\tau x} = \rho_E^{\tau x}|\vec{v}|^2 = 2\kappa_E^{\tau x}$, где $\kappa_E^{\tau x}$ — плотность кинетической энергии в точке (τ, x). По той же причине $r_E^{\tau k} = r_E^{\tau k}|\vec{\mathrm{v}}|^2 = 2\chi_E^{\tau k}$, где $\chi_E^{\tau k}$ — плотность кинетической энергии в точке (τ, k). Из уравнения (12) найдем

$$\mathrm{div}\left(\kappa_E \vec{v}\right)^{\tau x} = \int_k \mathrm{div}\left(\chi_E \vec{\mathrm{v}}\right)^{\tau k} \mathrm{H}_k^x = 0. \tag{13}$$

Дивергенция плотности потока энергии, естественно, также является c-вектором.

2.3. Баланс импульса

Помимо рассмотренных законов сохранения массы и энергии, система уравнений гидромеханики включает в себя так называемое уравнение баланса импульса, которое в значительной мере определяет модель изучаемой среды и, по существу, является попыткой предсказать структуру тензора плотности потока импульса $\mathbf{M} = \rho\,\vec{v}\otimes\vec{v}$. С этой целью в рассмотрение вводится новый тензор $\mathbf{T}$, называемый тензором напряжений, для которого постулируется равенство

$$\mathrm{div}\mathbf{M} = \mathrm{div}\mathbf{T}. \tag{14}$$

Выбор структуры тензора напряжений определяет ту или иную модель среды. Наиболее известны варианты идеальной жидкости ($\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$, где p — давление, а $\mathbf{I}$ — единичный тензор) и вязкой жидкости ($\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}'$, где $\mathbf{T}'$ — тензор вязких напряжений).

Для получения «спектрального» уравнения баланса плотности потока импульса заметим, что в пространстве τ–x тензор плотности потока импульса связан с энергией тела следующим соотношением (детали см. в [4]):

$$\mathrm{div}\left(\kappa_E \vec{v}\right)^{\tau x} = \mathbf{g}\left(\vec{v}, \mathrm{div}\mathbf{M}\right)^{\tau x},$$

где $\mathbf{g}$ — метрический тензор в пространстве τ–x. В пространстве τ–k можно получить аналогичную связь, вводя в рассмотрение аналог тензора плотности потока импульса $\mathbf{N}^{\tau k} = (r_E\,\vec{\mathrm{v}}\otimes\vec{\mathrm{v}})^{\tau k}$ и соответствующий метрический тензор $\mathbf{h}$

$$\mathrm{div}\left(\chi_E \vec{\mathrm{v}}\right)^{\tau k} = \mathbf{h}\left(\vec{\mathrm{v}}, \mathrm{div}\mathbf{N}\right)^{\tau k}.$$

Как и тензор $\mathbf{g}$, выберем тензор $\mathbf{h}$ исходя из условия $|\vec{\mathrm{v}}| = 1$.

В силу того, что дивергенция плотности потока энергии есть c-тензор [см. формулу (13)], имеет место равенство

$$\mathbf{h}\left(\vec{\mathrm{v}}, \mathrm{div}\mathbf{N}\right)^{\tau k} = \int_x \mathbf{g}(\vec{v}, \mathrm{div}\mathbf{M})^{\tau x}\,\mathrm{G}_x^k. \tag{15}$$

2.4. Учет внутренней энергии

Отказ от явного описания всех возможных масштабов движения приводит к необходимости разделения движения на «крупномасштабное», описываемое явно, и «мелкомасштабное», описываемое параметрически. Параметр, с помощью которого осуществляется учет мелкомасштабных флуктуаций, называется внутренней энергией. При введении в рассмотрение внутренней энергии мера $\overline{m}$ интерпретируется как полная энергия тела, т.е. сумма его кинетической и внутренней энергий. В пространстве τ–x равенство $|\vec{v}|^2 = 1$ трактуется как $\frac{2}{\rho_E}(\kappa_E + e_E) = 1$, где κ_E — плотность кинетической энергии, а e_E — плотность внутренней энергии тела. Аналогично равенство $|\vec{\mathrm{v}}|^2 = 1$ интерпретируется как $\frac{2}{r_E}(\chi_E + \varepsilon_E) = 1$, где χ_E и ε_E — плотности кинетической и внутренней энергий тела в пространстве τ–k. Закон сохранения энергии записывается в виде

$$\operatorname{div}\left(\left(\kappa_E + e_E\right)\vec{v}\right)^{\tau x} = \int_k \operatorname{div}\left(\left(\chi_E + \varepsilon_E\right)\vec{\mathrm{v}}\right)^{\tau k} \mathrm{H}_k^x = 0, \tag{16}$$

откуда

$$\operatorname{div}\left(\kappa_E \vec{v}\right)^{\tau x} = \int_k \operatorname{div}\left(\chi_E \vec{\mathrm{v}}\right)^{\tau k} \mathrm{H}_k^x, \quad \operatorname{div}\left(e_E \vec{v}\right)^{\tau x} = \int_k \operatorname{div}\left(\varepsilon_E \vec{\mathrm{v}}\right)^{\tau k} \mathrm{H}_k^x. \tag{17}$$

Связь тензора плотности потока импульса с обеими компонентами полной энергии выглядит следующим образом:

$$\operatorname{div}\left(\kappa_E \vec{v}\right)^{\tau x} = \mathbf{g}\left(\vec{v}, \operatorname{div}\mathbf{M}\right)^{\tau x} = -\operatorname{div}\left(e_E \vec{v}\right)^{\tau x}.$$

Отсюда

$$\operatorname{div}\left(\kappa_E \vec{v}\right)^{\tau x} = \mathbf{g}\left(\vec{v}, \operatorname{div}\mathbf{T}\right)^{\tau x} = -\operatorname{div}\left(e_E \vec{v}\right)^{\tau x}. \tag{18}$$

Из уравнений (18) с помощью (17) легко получаются соответствующие «спектральные» уравнения:

$$\operatorname{div}\left(\chi_E \vec{\mathrm{v}}\right)^{\tau k} = \mathbf{h}\left(\vec{\mathrm{v}}, \operatorname{div}\mathbf{F}\right)^{\tau k} = -\operatorname{div}\left(\varepsilon_E \vec{\mathrm{v}}\right)^{\tau k}. \tag{19}$$

Здесь тензор **F** — «спектральный» аналог тензора напряжений **T**.

2.5. Резюме

Если преобразование Фурье — замена базиса и преобразуются лишь пространственные координаты, то интегральный закон сохранения остается тем же. Следовательно, теми же остаются и дифференциальные законы. Таким образом, в пространстве τ–k относительно базиса Фурье имеем:

1. из $d_t m^\tau = 0$ следует $\operatorname{div}(r\vec{\mathrm{v}}) = 0$;
2. если выбрать **h**: $\mathbf{h}_{\alpha\beta}\mathrm{v}^\alpha \mathrm{v}^\beta = |\vec{\mathrm{v}}|^2 = 1$, то $\frac{1}{2}\operatorname{div}(r|\vec{\mathrm{v}}|^2\vec{\mathrm{v}}) \equiv \operatorname{div}(\chi\vec{\mathrm{v}}) = 0$;
3. если тензор $\mathbf{N} = r\vec{\mathrm{v}} \otimes \vec{\mathrm{v}}$ такой, что $\operatorname{div}(\chi\vec{\mathrm{v}}) = \mathbf{h}(\vec{\mathrm{v}}, \operatorname{div}\mathbf{N})$, то выбором тензора **F** получим

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{N} - \mathbf{F}\right) = 0, \tag{20}$$

4. введение внутренней энергии сводится к разделению области волновых чисел на две части: шар с центром в нуле, при этом соответствует среднему движению, а все остальное относится к флуктуациям.

Таким образом, имеют место соответствия:

$0=\mathrm{div}\left(\begin{pmatrix}\rho\\ \kappa\end{pmatrix}\vec{v}\right)=\int_k \mathrm{div}\left(\begin{pmatrix}r\\ \chi\end{pmatrix}\vec{\mathrm{v}}\right)\mathrm{H}_k^x$	$0=\mathrm{div}\left(\begin{pmatrix}r\\ \chi\end{pmatrix}\vec{\mathrm{v}}\right)=\int_x \mathrm{div}\left(\begin{pmatrix}\rho\\ \kappa\end{pmatrix}\vec{v}\right)\mathrm{G}_x^k$
$\mathrm{div}\mathbf{M}=\mathrm{div}\mathbf{T}$	$\mathrm{div}\mathbf{N}=\mathrm{div}\mathbf{F}$
$\mathbf{g}\left(\vec{v},\mathrm{div}\begin{pmatrix}\mathbf{M}\\ \mathbf{T}\end{pmatrix}\right)=\int_k \mathbf{h}\left(\vec{\mathrm{v}},\mathrm{div}\begin{pmatrix}\mathbf{N}\\ \mathbf{F}\end{pmatrix}\right)\mathrm{H}_k^x$	$\mathbf{h}\left(\vec{\mathrm{v}},\mathrm{div}\begin{pmatrix}\mathbf{N}\\ \mathbf{F}\end{pmatrix}\right)=\int_x \mathbf{g}\left(\vec{v},\mathrm{div}\begin{pmatrix}\mathbf{M}\\ \mathbf{T}\end{pmatrix}\right)\mathrm{G}_x^k$

3. Возможные приложения

Переход к «спектральной» форме записи часто позволяет упростить задачу, заменив вычисление производных от неизвестных функций вычислением производных от компонент известных c-тензоров, осуществляющих преобразование базисов.

3.1. Преобразование нелинейных членов (произведений)

3.1.1. Стандартный подход (свертка функций)

Рассмотрим в качестве примера преобразование выражения $a^x + b^x c^x$. Пусть

$$a^x=\int_k A^k\mathrm{H}_k^x,\quad b^x=\int_k B^k\mathrm{H}_k^x,\quad c^x=\int_k C^k\mathrm{H}_k^x.$$

Тогда

$$\begin{aligned}a^x+b^xc^x&=\int_{k_1}A^{k_1}\mathrm{H}_{k_1}^x+\int_{k_1}B^{k_1}\mathrm{H}_{k_1}^x\int_{k_2}C^{k_2}\mathrm{H}_{k_2}^x=\\&=\int_{k_1}A^{k_1}\mathrm{H}_{k_1}^x+\int_{k_1}\left(B^{k_1}\int_{k_2}C^{k_2}\mathrm{H}_{k_1}^x\mathrm{H}_{k_2}^x\right).\end{aligned}$$

Поскольку в соответствии с таблицей преобразования базисов (см. выше) имеем

$$\int_x \mathrm{G}_x^k\mathrm{H}_{k_1}^x=\delta\left(k-k_1\right)dk_1=\delta_{k_1}^k,$$
$$\int_x \mathrm{G}_x^k\mathrm{H}_{k_1}^x\mathrm{H}_{k_2}^x=\delta\left(k-k_1-k_2\right)dk_1dk_2=\delta_{k_1k_2}^k,$$

где $\delta(\cdot)$ — δ-функция, для предыдущего выражения получим

$$\int_x\left(a+bc\right)^x\mathrm{G}_x^k=\int_{k_1}A^{k_1}\underbrace{\int_x\mathrm{G}_x^k\mathrm{H}_{k_1}^x}_{=\delta_{k_1}^k}+\int_{k_1}B^{k_1}\int_{k_2}C^{k_2}\underbrace{\int_x\mathrm{G}_x^k\mathrm{H}_{k_1}^x\mathrm{H}_{k_2}^x}_{=\delta_{k_1k_2}^k}=A^k+\int_{k_1}B^{k_1}C_{k_1}^{k-k_1}.$$

Последнее слагаемое называется сверткой Фурье-образов исходных функций.

Если, в частности, $\mathrm{H}_k^x = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\ e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x})}d\mathbf{k}$ и $\mathrm{G}_x^k = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\ e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x})}d\mathbf{x}$, где $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$, $\mathbf{k} = (k^1, k^2, k^3)$, то преобразование выражения $a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})\, c(\mathbf{x})$, рассмотренного в разобранном выше примере, проводится следующим, хорошо известным, способом. Пусть

$$a(\mathbf{x}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\int_k A(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x})}d\mathbf{k},$$

$$b(\mathbf{x}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\int_k B(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x})}d\mathbf{k},$$

$$c(\mathbf{x}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\int_k C(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x})}d\mathbf{k}.$$

Тогда верны равенства

$$a + bc = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\int_{\mathbf{k}_1} A(\mathbf{k}_1)e^{i\mathbf{k}_1(\mathbf{x})}d\mathbf{k}_1 +$$

$$+\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\int_{\mathbf{k}_1} B(\mathbf{k}_1)e^{i\mathbf{k}_1(\mathbf{x})}d\mathbf{k}_1 \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\int_{\mathbf{k}_2} C(\mathbf{k}_2)e^{i\mathbf{k}_2(\mathbf{x})}d\mathbf{k}_2 =$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\int_{\mathbf{k}_1} A(\mathbf{k}_1)e^{i\mathbf{k}_1(\mathbf{x})}d\mathbf{k}_1 + \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbf{k}_1} B(\mathbf{k}_1)\int_{\mathbf{k}_2} C(\mathbf{k}_2)e^{i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)(\mathbf{x})}d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_1.$$

Далее имеем

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\int_{\mathbf{x}} (a+bc)e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x})}d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{k}_1} A(\mathbf{k}_1)\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbf{x}} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)(\mathbf{x})}d\mathbf{x}}_{=\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)}d\mathbf{k}_1 +$$

$$+\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\int_{\mathbf{k}_1} B(\mathbf{k}_1)\int_{\mathbf{k}_2} C(\mathbf{k}_2)\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbf{x}} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)(\mathbf{x})}d\mathbf{x}}_{=\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)}d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_1 =$$

$$= A(\mathbf{k}) + \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\int_{\mathbf{k}_1} B(\mathbf{k}_1)\int_{\mathbf{k}_2} C(\mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_1 =$$

$$= A(\mathbf{k}) + \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\int_{\mathbf{k}_1} B(\mathbf{k}_1)C(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)d\mathbf{k}_1.$$

3.1.2. Общий подход

Для демонстрации общего подхода рассмотрим получение Фурье-аналога следующей функции:

$$s(x) \equiv a(x) + \partial_x b(x) + f(x) g(x), \tag{21}$$

определенной в области $\Omega \subset \mathbb{R}^1$, ограниченной множеством Г.

Пусть функции $A(k)$, $B(k)$, $F(k)$ и $G(k)$ являются Фурье-образами соответствующих функций, входящих в (21), и для них справедливы равенства вида:

$$C(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\Omega e^{ikx} c(x) dx, \quad x \in \Omega, \tag{22}$$

$$c(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_k e^{-ikx} C(k) dk, \quad k \in \mathbb{R}^1, \tag{23}$$

где $c \in \{a, b, f, g\}$ и $C \in \{A, B, F, G\}$. Интеграл в (22) берется по области Ω, но если функцию $c(x)$ доопределить на все $\mathbb{R}^1$ нулем, то указанный интеграл можно заменить интегралом по всем вещественным x

$$C(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x e^{ikx} c(x) dx, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

Чтобы получить Фурье-аналог $S(k)$ функции $s(x)$, проинтегрируем (21) по x с весом $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$:

$$S(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\Omega e^{ikx} \left(a(x) + \partial_x b(x) + f(x) g(x) \right) dx.$$

В силу линейности интегрирования результат состоит из трех слагаемых. Вычислим далее интеграл от второго слагаемого по частям и заменим $\int_\Omega$ на $\int_x$:

$$S(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{ikx} b(x) \right)_\Gamma - \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_x e^{ikx} b(x) dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x e^{ikx} \left(a(x) + f(x) g(x) \right) dx.$$

Второе и первая часть третьего слагаемого выражаются через Фурье-образы функций $b(x)$ и $a(x)$. Функции же $f(x)$ и $g(x)$ в последнем слагаемом запишем через соответствующие Фурье-образы по формуле (23):

$$S(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{ikx} b(x) \right)_\Gamma - ikB(k) + A(k) +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x e^{ikx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_1} e^{-ik_1 x} F(k_1) dk_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_2} e^{-ik_2 x} G(k_2) dk_2 \right) dx.$$

Далее в последнем слагаемом меняем порядок интегрирования так, чтобы первым вычислялся интеграл по x:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{k_1} F(k_1)\left(\int_{k_2} G(k_2)\left(\frac{1}{2\pi}\int_x e^{i(k-k_1-k_2)x}dx\right)dk_2\right)dk_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{k_1} F(k_1)G(k-k_1)dk_1.$$

Здесь учитывается, что внутренняя скобка равна $\delta(k - k_1 - k_2)$, и результат есть то, что называется сверткой двух функций $f(x)$ и $g(x)$. Окончательно искомый Фурье-аналог записывается в виде

$$S(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{ikx}b(x)\right)_\Gamma - ikB(k) + A(k) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{k_1} F(k_1)G(k-k_1)dk_1.$$

Для вычисления первого слагаемого требуется постановка граничных условий на границе Γ области определения исходной функции Ω.

Таким образом, если интеграл $\int_\Omega$ можно заменить интегралом по всем вещественным x, то имеем следующие результаты, представленные в табл. 1, 2 и 3.

Таблица 1

Произведения функций и их Фурье-образы

Функция	Фурье-образ
$a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_k e^{-ikx}A(k)dk$	$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\Omega e^{ikx}a(x)dx$
$a(x)b(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{k_1} A(k_1)B(k-k_1)dk_1$
$a(x)b(x)c(x)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{k_1} A(k_1)\int_{k_2} B(k_2)C(k-k_1-k_2)dk_2dk_1$
...	...
$a_1(x)\,a_2(x)...a_n(x)$	$\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{n-1}}\int_{k_1} A_1(k_1)\int_{k_2} A_2(k_2)\ldots\int_{k_{n-1}} A_{n-1}(k_{n-1})A_n(k-k_1-\ldots-k_{n-1})dk_{n-1}\ldots dk_1$

Таблица 2

Произведения функции и одной производной и их Фурье-образы

Функция	Фурье-образ
$\partial_x a(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{ikx}a(x)\right)_\Gamma - ikA(k)$
$a(x)\partial_x b(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{ikx}a(x)b(x)\right)_\Gamma - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{K_1} i(k-k_1)A(k_1)B(k-k_1)dk_1$
$a(x)b(x)\partial_x c(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{ikx}a(x)b(x)c(x)\right)_\Gamma -$ $-\frac{1}{2\pi}\int_{K_1} A(k_1)\int_{K_2} i(k-k_1-k_2)B(k_2)C(k-k_1-k_2)dk_2dk_1$
...	...

Функция	Фурье-образ
$a_1(x)a_2(x)\ldots\partial_x a_n(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{ikx}a_1(x)a_2(x)\ldots a_n(x)\right)_\Gamma -$ $-\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{n-1}}\int_{k_1}A_1(k_1)\int_{k_2}A_2(k_2)\ldots\int_{k_{n-1}}i(k-k_1-\ldots-k_{n-1})\times$ $\times A_{n-1}(k_{n-1})A_n(k-k_1-\ldots-k_{n-1})dk_{n-1}\ldots dk_1$

Таблица 3

Произведения функции и двух производных и их Фурье-образы

Функция	Фурье-образ
$\partial_x a(x)\partial_x b(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{ikx}a(x)\partial_x b(x)\right)_\Gamma - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{k_1}k_1(k-k_1)A(k_1)B(k-k_1)dk_1$
$a(x)\partial_x b(x)\partial_x c(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{ikx}a(x)b(x)\partial_x c(x)\right)_\Gamma -$ $-\frac{1}{2\pi}\int_{k_1}B(k_1)\int_{k_2}k_1(k-k_1-k_2)A(k_2)C(k-k_1-k_2)dk_2dk_1$
…	
$a_1(x)a_2(x)\ldots\partial_x a_{n-1}(x)\partial_x a_n(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{ikx}a_1(x)a_2(x)\ldots a_{n-1}(x)\partial_x a_n(x)\right)_\Gamma -$ $-\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{n-1}}\int_{k_1}A_1(k_1)\int_{k_2}A_2(k_2)\ldots\int_{k_{n-1}}k_1(k-k_1-\ldots-k_{n-1})\times$ $\times A_{n-1}(k_{n-1})A_n(k-k_1-\ldots-k_{n-1})dk_{n-1}\ldots dk_1$

3.2. Связь поля скорости изменения места с полем скорости изменения волновых чисел

Поскольку исходная конгруэнция мировых линий в результате преобразования Фурье утрачивается и аналогичная конгруэнция в пространстве τ–k может быть, в принципе, любой, ее удобно выбирать в соответствии с формулами:

$$\left(\nu^\alpha\right)^{\tau k} = \int_x \mathrm{G}_x^k \left(\nu^\alpha\right)^{\tau x}, \qquad (24)$$

$$\left(\nu^\alpha\right)^{\tau x} = \int_k \mathrm{H}_k^x \left(\nu^\alpha\right)^{\tau k}. \qquad (25)$$

Если $\mathrm{H}_k^x = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\, e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x})}d\mathbf{k}$ и $\mathrm{G}_x^k = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\, e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x})}d\mathbf{x}$, то

$$\nu^\alpha(\tau,\mathbf{k}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\int_{\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x})}\nu^\alpha(\tau,\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

$$\nu^\alpha(\tau,\mathbf{x}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\int_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x})}\nu^\alpha(\tau,\mathbf{k})d\mathbf{k}.$$

3.3. Преобразование уравнений модели жидкости

3.3.1. Уравнение неразрывности

Рассмотрим еще раз уравнение (10), положим $v^0 = \text{const}$ и представим левую часть в виде

$$0 = div\left(\rho_E \vec{v}\right)^{\tau x} = \left(\partial_t \rho_E + \left(\nabla_x, \rho_E \vec{u}\right)\right)^{\tau x},$$

где $\vec{u} = (v^1, v^2, v^3)$. Пользуясь соотношениями (1) и (24)

$$\rho_E^{\tau x} = \int_k \mathrm{H}_k^x r_E^{\tau k}, \quad \left(v^\alpha\right)^{\tau x} = \int_k \mathrm{H}_k^x \left(\nu^\alpha\right)^{\tau k}, \tag{26}$$

запишем далее

$$0 = \mathrm{div}\left(\rho_E \vec{v}\right)^{\tau x} = \partial_t \int_{k_1} \mathrm{H}_{k_1}^x r_E^{\tau k_1} + \nabla_{x^n}\left(\int_{k_1} \mathrm{H}_{k_1}^x r_E^{\tau k_1} \int_{k_2} \mathrm{H}_{k_2}^x \left(\nu^n\right)^{\tau k_2}\right) =$$
$$= \int_{k_1} \mathrm{H}_{k_1}^x \partial_t r_E^{\tau k_1} + \int_{k_1} r_E^{\tau k_1} \int_{k_2} \left(\nu^n\right)^{\tau k_2} \nabla_{x^n}\left(\mathrm{H}_{k_1}^x \mathrm{H}_{k_2}^x\right).$$

Преобразование Фурье этого выражения дает

$$\int_x \mathrm{G}_x^k \mathrm{div}\left(\rho_E \vec{v}\right)^{\tau x} = \int_{k_1} \partial_t r_E^{\tau k_1} \int_x \mathrm{G}_x^k \mathrm{H}_{k_1}^x + \int_{k_1} r_E^{\tau k_1} \int_{k_2} \left(\nu^n\right)^{\tau k_2} int_x \mathrm{G}_x^k \nabla_{x^n}\left(\mathrm{H}_{k_1}^x \mathrm{H}_{k_2}^x\right) =$$
$$= \int_{k_1} \partial_t r_E^{\tau k_1} \delta_{k_1}^k + \int_{k_1} r_E^{\tau k_1} \int_{k_2} \left(\nu^n\right)^{\tau k_2} \int_x G_x^k \left(\mathrm{H}_{k_1}^x \mathrm{H}_{k_2}^x\right) \nabla_{x^n}\left(\ln\left(\mathrm{H}_{k_1}^x \mathrm{H}_{k_2}^x\right)\right) =$$
$$= \partial_t r_E^{\tau k} + \int_{k_1} r_E^{\tau k_1} \int_{k_2} \left(\nu^n\right)^{\tau k_2} \nabla_{x^n}\left(\ln\left(\mathrm{H}_{k_1}^x \mathrm{H}_{k_2}^x\right)\right) \delta_{k_1 k_2}^k.$$

Здесь последнее равенство получено в предположении, что величина

$$\nabla_{x^n}\left(\ln\left(\mathrm{H}_{k_1}^x \mathrm{H}_{k_2}^x\right)\right) = \nabla_{x^n}\left(\ln\left(\mathrm{H}(x, k_1)\mathrm{H}(x, k_2)\right)\right)$$

не зависит от x, как это обычно и бывает, а

$$\int_x \mathrm{G}_x^k \left(\mathrm{H}_{k_1}^x \mathrm{H}_{k_2}^x\right) = \delta_{k_1 k_2}^k.$$

Теперь, учитывая, что $\delta_{k_1 k_2}^k = \delta(k - k_1 - k_2) dk_1\, dk_2$ можно записать в виде $\delta_{k_1 k_2}^k = \delta_{k_2}^{k - k_1} dk_1$, в итоге получим

$$\partial_t r_E^{\tau k} + \int_{k_1} r_E^{\tau k_1} \left(\nu^\alpha\right)^{\tau(k - k_1)} \nabla_{x^\alpha}\left(\ln\left(\mathrm{H}_k^x\right) dk_1\right) = 0. \tag{27}$$

Таким образом, при переходе к пространству τ–k пространственные производные от потока массы преобразуются в пространственные производные от известного оператора H, осуществляющего преобразование базиса.

3.3.2. Уравнение баланса энергии

Для плотности энергии тоже можно записать аналогичную цепочку равенств. Так, из уравнения $\mathrm{div}(\kappa_E\vec{v})^{\tau x}=0$ и соотношения $\kappa_E^{\tau x}=\int_k \mathrm{H}_k^x\,\chi_E^{\tau k}$ следует уравнение типа (27):

$$\partial_t\chi_E^{\tau k}+\int_{k_1}\chi_E^{\tau k_1}\left(\nu^\alpha\right)^{\tau(k-k_1)}\nabla_{x^\alpha}\ln\left(\mathrm{H}_k^x\right)dk_1=0. \tag{28}$$

3.3.3. Уравнение движения

Уравнение баланса плотности потока импульса (14) с учетом уравнения неразрывности (10) запишем в виде

$$\rho_E d_t\vec{v}=\rho_E\partial_t\vec{v}+\rho_E\left(\vec{u},\nabla_x\right)\vec{v}=\mathrm{div}\mathbf{T}. \tag{29}$$

Пользуясь формулами (26), для выражения в левой части найдем

$$\rho_E\partial_t v^n+\rho_E\left(\vec{u},\nabla_x\right)v^n=$$
$$=\int_{k_1}\mathrm{H}_{k_1}^x r_E^{\tau k_1}\partial_t\int_{k_2}\mathrm{H}_{k_2}^x\left(\nu^n\right)^{\tau k_2}+\int_{k_1}\mathrm{H}_{k_1}^x r_E^{\tau k_1}\int_{k_2}\mathrm{H}_{k_2}^x\left(\nu^m\right)^{\tau k_2}\nabla_{x^m}\left(\int_{k_3}\mathrm{H}_{k_3}^x\left(\nu^n\right)^{\tau k_3}\right)=$$
$$=\int_{k_1}r_E^{\tau k_1}\int_{k_2}\mathrm{H}_{k_1}^x\mathrm{H}_{k_2}^x\partial_t\left(\nu^n\right)^{\tau k_2}+\int_{k_1}r_E^{\tau k_1}\int_{k_2}\left(\nu^m\right)^{\tau k_2}\int_{k_3}\left(\nu^n\right)^{\tau k_3}\mathrm{H}_{k_1}^x\mathrm{H}_{k_2}^x\nabla_{x^m}\mathrm{H}_{k_3}^x=$$
$$=\int_{k_1}r_E^{\tau k_1}\int_{k_2}\mathrm{H}_{k_1}^x\mathrm{H}_{k_2}^x\partial_t\left(\nu^n\right)^{\tau k_2}+\int_{k_1}r_E^{\tau k_1}\int_{k_2}\left(\nu^m\right)^{\tau k_2}\int_{k_3}\left(\nu^n\right)^{\tau k_3}\nabla_{x^m}\left(\ln\mathrm{H}_{k_3}^x\right)\mathrm{H}_{k_1}^x\mathrm{H}_{k_2}^x\mathrm{H}_{k_3}^x.$$

Отсюда, полагая, что $\nabla_{x^m}\ln\mathrm{H}_k^x$ не зависит от x, для преобразования Фурье левой части (29) получим

$$\int_x\mathrm{G}_x^k\left(\rho_E\partial_t v^n+\rho_E\left(\vec{u},\nabla_x\right)v^n\right)^{\tau x}=$$
$$=\int_{k_1}r_E^{\tau k_1}\int_{k_2}\partial_t\left(\nu^n\right)^{\tau k_2}\delta_{k_1k_2}^k+\int_{k_1}r_E^{\tau k_1}\int_{k_2}\left(\nu^m\right)^{\tau k_2}\int_{k_3}\hbar(\nu^n)^{\tau k_3}\nabla_{x^m}\left(\ln\mathrm{H}_{k_3}^x\right)\delta_{k_1k_2k_3}^k=$$
$$=\int_{k_1}r_E^{\tau k_1}\partial_t\left(\nu^n\right)^{\tau(k-k_1)}dk_1+\int_{k_1}r_E^{\tau k_1}\int_{k_2}\left(\nu^m\right)^{\tau k_2}\left(\nu^n\right)^{\tau(k-k_1-k_2)}\nabla_{x^m}\left(\ln\mathrm{H}_{k-k_1-k_2}^x\right)dk_2dk_1.$$

В последнем равенстве учтено, что $\delta_{k_1k_2}^k=\delta_{k_2}^{k-k_1}dk_1$ и $\delta_{k_1k_2k_3}^k=\delta_{k_3}^{k-k_1-k_2}dk_1\,dk_2$.

Идеальная жидкость

Правую часть уравнения (29) запишем так:

$$\left(\mathrm{div}\mathbf{T}\right)^n=\nabla_{x^m}\left(-p\mathbf{I}\right)^{nm}=-\partial_{x^n}p.$$

Считая, что $p^{\tau x}=\int_k\mathrm{H}_k^x\,q^{\tau k}$, получим

$$\left(\mathrm{div}\mathbf{T}\right)^n=-\nabla_{x^n}\left(\int_{k_1}\mathrm{H}_{k_1}^x q^{\tau k_1}\right)=-\int_{k_1}q^{\tau k_1}\mathrm{H}_{k_1}^x\nabla_{x^n}\left(\ln\left(\mathrm{H}_{k_1}^x\right)\right),$$

или

$$-\partial_{x^n} p = -\int_{k_1} q^{\tau k_1} \mathrm{H}^x_{k_1} \nabla_{x^n} \left(\ln\left(\mathrm{H}^x_{k_1}\right)\right).$$

Преобразуя это выражение по Фурье и полагая, что $\nabla_{x^n} \ln \mathrm{H}^x_k$ не зависит от x, далее найдем

$$\int_x \mathrm{G}^k_x \left(-\partial_{x^n} p\right)^{\tau x} = -\int_k q^{\tau k_1} \nabla_{x^n} \left(\ln\left(\mathrm{H}^x_{k_1}\right)\right) \delta^k_{k_1} = -q^{\tau k} \nabla_{x^n} \left(\ln\left(\mathrm{H}^x_k\right)\right).$$

Откуда получим требуемый вид уравнения баланса плотности потока импульса идеальной жидкости

$$\int_{k_1} r_E^{\tau k_1} \partial_t \left(\nu^n\right)^{\tau(k-k_1)} dk_1 + \int_{k_1} r_E^{\tau k_1} \int_{k_2} \left(\nu^m\right)^{\tau k_2} \left(\nu^n\right)^{\tau(k-k_1-k_2)} \nabla_{x^m} \left(\ln \mathrm{H}^x_{k-k_1-k_2}\right) dk_2 dk_1 = \quad (30)$$

$$= -q^{\tau k} \nabla_{x^n} \left(\ln\left(\mathrm{H}^x_k\right)\right). \quad (31)$$

Вязкая жидкость

Тензор напряжений вязкой жидкости определяется выражением

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D},$$

где μ — коэффициент динамической вязкости, а $\mathbf{D}$ — тензор скоростей деформации (симметричная часть градиента скорости). В этом случае правую часть в (29) запишем в виде

$$\left(\mathrm{div}\left(-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}\right)\right)^n = -\partial_{x^n} p + \mu \nabla_{x^m} \left(\delta^{nl} v^m_{;l} + \delta^{ml} v^n_{;l}\right),$$

и для вязкого слагаемого получим

$$\left(\mathrm{div}\left(2\mu\mathbf{D}\right)\right)^n = \mu \nabla_{x^m} \left(\nabla_{x^n} \int_{k_1} \mathrm{H}^x_{k_1} \left(\nu^m\right)^{\tau k_1} + \nabla_{x^m} \int_{k_1} \mathrm{H}^x_{k_1} \left(\nu^n\right)^{\tau k_1}\right) =$$

$$= \mu \int_{k_1} \left(\nu^m\right)^{\tau k_1} \nabla_{x^m} \left(\mathrm{H}^x_{k_1} \nabla_{x^n} \ln\left(\mathrm{H}^x_{k_1}\right)\right) + \mu \int_{k_1} \left(\nu^n\right)^{\tau k_1} \nabla_{x^m} \left(\mathrm{H}^x_{k_1} \nabla_{x^m} \ln\left(\mathrm{H}^x_{k_1}\right)\right).$$

Полагая, что $\nabla_{x^m} (\ln(\mathrm{H}^x_k))$ не зависит от x, имеем

$$\nabla_{x^m} \left(2\mu\mathbf{D}\right)^{nm} =$$

$$= \mu \int_{k_1} \left(\nu^m\right)^{\tau k_1} \nabla_{x^m} \left(\ln\left(H^x_{k_1}\right)\right) \nabla_{x^n} \left(\ln\left(H^x_{k_1}\right)\right) H^x_{k_1} + \mu \int_{k_1} \left(\nu^n\right)^{\tau k_1} \left(\nabla_{x^m} \ln\left(H^x_{k_1}\right)\right)^2 H^x_{k_1}.$$

Преобразуя это выражение по Фурье, найдем

$$\int_x \mathrm{G}^k_x \left(\nabla_{x^m} \left(2\mu\mathbf{D}\right)^{nm}\right)^{\tau x} =$$

$$= \mu \int_{k_1} \left(\nu^m\right)^{\tau k_1} \nabla_{x^m} \left(\ln\left(\mathrm{H}^x_{k_1}\right)\right) \nabla_{x^n} \left(\ln\left(\mathrm{H}^x_{k_1}\right)\right) \delta^k_{k_1} + \mu \int_{k_1} \left(\nu^n\right)^{\tau k_1} \left(\nabla_{x^m} \ln\left(\mathrm{H}^x_{k_1}\right)\right)^2 \delta^k_{k_1} =$$

$$= \mu \left(\nu^m\right)^{\tau k} \nabla_{x^m} \left(\ln\left(\mathrm{H}^x_k\right)\right) \nabla_{x^n} \left(\ln\left(\mathrm{H}^x_k\right)\right) + \mu \left(\nu^n\right)^{\tau k} \left(\nabla_{x^m} \ln\left(\mathrm{H}^x_k\right)\right)^2.$$

Откуда получим требуемый вид уравнения баланса плотности потока импульса:

$$\int_{k_1} r_E^{\tau k_1} \partial_t \left(\nu^n\right)^{\tau(k-k_1)} dk_1 +$$

$$+\int_{k_1} r_E^{\tau k_1} \int_{k_2} \left(\nu^m\right)^{\tau k_2} \left(\nu^n\right)^{\tau(k-k_1-k_2)} \nabla_{x^m} \left(\ln \mathrm{H}^x_{k-k_1-k_2}\right) dk_2 dk_1 =$$

$$= -q^{\tau k} \nabla_{x^n} \left(\ln\left(\mathrm{H}^x_k\right)\right) + \mu\left(\nu^m\right)^{\tau k} \nabla_{x^m} \left(\ln\left(\mathrm{H}^x_k\right)\right) \nabla_{x^n} \left(\ln\left(\mathrm{H}^x_k\right)\right) +$$

$$+\mu\left(\nu^n\right)^{\tau k} \left(\nabla_{x^m} \ln\left(\mathrm{H}^x_k\right)\right)^2. \qquad (32)$$

4. Обсуждение результатов

Кратко сформулируем результаты, полученные в настоящей работе.

Изучена связь дифференциальных законов сохранения и «спектральных» уравнений. Было показано, что и дифференциальный закон и его «спектральный» аналог соответствуют одному и тому же интегральному закону сохранения меры сечения мировой трубки тела (или ее «спектрального» аналога). Таким образом, «спектральное» уравнение есть тот же самый дифференциальный закон сохранения, но записанный в терминах иного базиса.

$$d_t \bar{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} d_t\left(J\rho\right) = 0, \\ d_t\left(\Upsilon r\right) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} div\left(\rho\vec{v}\right) = 0, \\ div\left(r\vec{\nu}\right) = 0. \end{cases}$$

Более того, один интегральный закон сохранения порождает бесконечно много дифференциальных законов, связанных между собой интегральными преобразованиями (заменой базиса).

Балансовые соотношения типа уравнения баланса плотности потока импульса также можно записать в терминах компонент, соответствующих различным базисам. Здесь, однако, необходимо некоторое соглашение относительно процедуры построения конгруэнции траекторий в пространстве τ–k.

Наконец, для замыкания системы уравнений обычно требуется так называемое уравнение состояния. Сформулировав его в терминах иного базиса, мы получим систему уравнений гидромеханики в форме, которая выше называлась «спектральной». Рассмотрим пару таких систем, условно называя одну из них исходной, соответствующей физическому пространству τ–x, а другую, соответствующую пространству волновых чисел τ–k — Фурье-образом исходной. Имеем

Исходная система	Закон	Фурье-образ
$\mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0$	сохранение массы	$\mathrm{div}(r\vec{\nu}) = 0$
$\mathrm{div}\mathbf{M} = \mathrm{div}\mathbf{T}$	баланс импульса	$\mathrm{div}\mathbf{N} = \mathrm{div}\mathbf{F}$
$\mathrm{div}((\kappa + e)\vec{v}) = 0$	сохранение энергии	$\mathrm{div}((\chi + \varepsilon)\vec{\nu}) = 0$
$p = p(\rho, e)$	уравнение состояния	$\pi = \pi(r, \varepsilon)$

Связь между обеими системами дается соотношениями (12), (15) и (13). Поставив соответствующие граничные условия, решать можно любую систему. Решения обеих систем связаны интегральными преобразованиями. Кроме того, решение любой системы дифференциальных уравнений будет соответствовать одной и той же системе интегральных законов сохранения.

Литература

1. *Белевич М.Ю.* О «спектральной» форме уравнений гидромеханики. I. Описание проблемы и пример подхода // Учёные записки РГГМУ, 2014, № 37, с. 44–53.
2. *Белевич М.Ю.* О «спектральной» форме уравнений гидромеханики. II. Функции, как бесконечномерные тензоры // Учёные записки РГГМУ, 2015, № 38, с. 59–65.
3. *Белевич М.Ю.* О «спектральной» форме уравнений гидромеханики. III. Интегральные преобразования как замена базиса и интегральные соотношения механики жидкости // Учёные записки РГГМУ, 2015, № 40, с. 81–95.
4. *Belevich M.* Causal description of non-relativistic dissipative fluid motion // Acta Mechanica, 2003, vol. 161, pp. 65–80.
5. *Schutz B.F.* Geometrical Methods of Mathematical Physics. — Cambridge: Cambridge University Press, 1980. — 250 p. (Пер.: *Шутц Б.* Геометрические методы математической физики. — М.: Мир, 1984. — 304 с.).