

*Е.З. Шнейерсон*

## **О НЕКОТОРЫХ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СУЩЕСТВЕННО НЕИДЕАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ**

*E.Z. Shneyerson*

## **ON CERTAIN BASIC DYNAMICAL PROPERTIES OF THE MECHANICAL SYSTEMS WITH STRONGLY NON-IDEAL CONSTRAINTS**

*Рассмотрен специфический класс задач динамики механических систем, в которых нарушается основополагающая в аналитической механике Лагранжа гипотеза идеальности связей. Приводятся примеры конструктивных методов исследования, позволяющих учесть неидеальность реальных связей. Проанализированы нестандартные эффекты, сопровождающие движение указанных систем.*

*Описаны виброударные режимы движения систем с существенно неидеальными связями, отличающиеся многообразием и представляющие значительный интерес как в теоретическом, так и в прикладном отношении.*

*Ключевые слова: уравнения Лагранжа, существенно неидеальные связи, трение, парадокс Пэнлеве, виброударные движения, косой удар, стесненный удар, перемена направления скольжения, виброударные автоколебания.*

*The specific class of the mechanical systems is considered. These systems are notable for infringement of ideal constraints hypothesis in Lagrange analytical mechanics. The special scientific methods of real non-ideal constraints examination are discussed. The motion of such systems is accompanied with non-typical effects. The vibroimpact motions of the systems with non-ideal constraints are considered too. Both theoretical and applied importance of these regimes is argued.*

*Keywords: Lagrange equations, strongly non-ideal constraints, friction, Penleve paradox, vibroimpact motions, glancing collision, straitened collision, change of sliding, vibroimpact auto-oscillations.*

Классическая динамика несвободных механических систем основана на гипотезе об идеальности наложенных на систему связей. Именно это предположение является краеугольным камнем формализма Лагранжа, сформулированного великим французским математиком и механиком в его фундаментальном труде «Аналитическая механика» [13]. Использование уравнений Лагранжа второго рода позволило решить необозримое число теоретических и прикладных задач и, естественно, не потеряло своего значения по сей день.

Безусловно, схематизация наложенных на систему связей в виде идеальных позволяет во многих случаях получить достоверные результаты. Однако указанный подход отнюдь не является универсальным, поскольку основополагающая гипотеза часто не согласуется со свойствами реальных связей.

Наличие трения, определяющее неидеальный характер наложенных на систему связей, принципиально усложняет динамическое исследование. В наиболее простых случаях силы трения (касательные реакции) не зависят от параметров движения системы. Эти силы определяются на основе квазистатических зависимостей, устанавливающих соотношение между нормальными и касательными составляющими реакций, и могут быть отнесены к числу задаваемых сил. При исследовании таких систем вполне применим формализм Лагранжа второго рода.

Выделяются два класса систем с трением, в которых касательные реакции зависят от параметров движения. Если при этом влияние сил трения не изменяет качественных свойств движения, то такие системы характеризуются *слабо неидеальными* связями. При исследовании динамики этих систем формализм Лагранжа второго рода также применим, но в сочетании с итерационными процедурами. Указанный процесс, в котором в качестве исходного приближения используется соответствующая система с идеальными связями, оказывается сходящимся [7]. Важно отметить, что свойство «слабонеидеальности» определяется не вообще малостью сил трения, а незначительностью их влияния на характер движения. Можно привести примеры механизмов, в которых объективно малое трение значительным образом влияет на их динамику [4, 21]. В некоторых случаях, напротив, большие силы трения практически не изменяют качественных особенностей движения.

Другой класс механических систем характеризуется доминирующим влиянием сил трения на происходящие в них динамические процессы. Это системы с *существенно неидеальными* связями, в которых касательные реакции изменяют качественный характер движения. Указанные механические системы отличаются специфическими свойствами и требуют особых подходов при исследовании. Такие исследования проводятся с конца XIX — начала XX вв. (П. Пэнлеве, Е.А. Болотов) [2, 18]. Значительный вклад в изучение динамики систем с трением внесли П. Аппель, Н.Г. Четаев, Г.К. Пожарицкий, В.В. Румянцев и другие [1, 17, 20, 22].

Важную роль сыграла работа Н.В. Бутенина [3]. В ней рассмотрен один из способов разрешения *парадокса Пэнлеве*, сущность которого состоит в следующем. Формально проинтегрированные (с учетом закона трения Амонтона—Кулона) уравнения движения дают отрицательное значение для нормальной реакции связи [18]. Возникла дилемма: либо опровергнуть указанный закон трения, либо констатировать невозможность движения при определенных начальных условиях, что равносильно нарушению принципа механического детерминизма. В результате развернувшейся в свое время дискуссии, в которой участвовали многие видные ученые, были предложены два варианта разрешения парадокса.

Первый вариант основан на мгновенном («скачкообразном») изменении начальных условий, поскольку исходные условия не согласуются со свойствами неидеальных связей. При этом сохраняется представление об абсолютной жесткости связи, но предполагается возникновение в этой связи импульсной реакции [16]. По выражению Пэнлеве,

«...мы получаем первый пример **соударения без удара** — соударение между двумя телами, которые не толкают друг друга, но взаимно приспособливают скорости» [18].

Л. Лекорню, Г. Гамель и Л. Прандтль наметили другой путь разрешения парадокса, «защищая» закон Кулона, но рассматривая контактирующие тела как деформируемые, поскольку это соответствует их истинной природе. Заметим, что к классу парадоксов Пэнлеве относится еще один вариант нарушения механического детерминизма — теоретическое существование *нескольких равноправных движений* при заданных начальных условиях. Подобная неоднозначность обсуждается в работе [11].

Ряд специфических задач динамики систем с трением рассмотрен Г.К. Пожарицким [17]. Исследуется многообразие возможных вариантов плоского движения одной системы, соответствующих определенным начальным условиям. Частные результаты объединяются на основе введенного вариационного принципа, трактуемого как обобщение принципа Гаусса на динамические системы с неидеальными связями. Заметим, что сфера применимости сформулированного принципа весьма ограничена, поскольку он касается лишь тех систем, для которых нормальные реакции априори известны и не зависят от характера движения.

Представляет интерес другая попытка обобщения принципа Гаусса на системы с неидеальными связями, предпринятая В.В. Румянцевым [20]. При этом силы трения не вводятся явно в функцию принуждения. Указанное основано на допущении, что, несмотря на наличие неидеальных связей, можно выделить множество таких возможных перемещений (так называемых (с)-перемещений), на которых работа сил трения оказывается нулевой. В качестве соответствующих примеров можно указать ряд систем, подчиняющихся совокупности идеальных и неидеальных связей. Формулировка установленного принципа совпадает с классической формулировкой принципа Гаусса (для случая идеальных связей). Существенное отличие состоит в том, что минимизируемая функция принуждения для систем с трением рассматривается только в классе (с)-ускорений.

Отметим, что и ранее осуществлялись попытки расширения общих принципов механики, не содержащих в своих математических формулировках реакций связей, на системы с трением. П. Аппелем был установлен модифицированный принцип Эйлера — Лагранжа для возможных перемещений, ортогональных к реакциям поверхностей с трением [1]. Аналогичный принцип сформулирован Н.Г. Четаевым для возможных перемещений, ортогональных к действительным скоростям точек системы [22]. Некоторые специфические особенности динамики систем с неидеальными связями рассмотрены в работе [9].

Особое место в механике систем с трением занимают задачи, в которых контакт соприкасающихся тел рассматривается не как точечный, а как распределенный. Основа такого подхода была заложена Н.Е. Жуковским, исследовавшим равновесие тел на шероховатой плоскости. Развитие идей, связанных с плоским движением твердого тела при наличии распределенного трения, содержится в малоизвестной монографии Ф.А. Опейко [15]. Исследуются однозначность решения уравнений статики при плоском трении, а также задачи динамики трогания с места в приложении к конкретным инженерным проблемам. Отметим, что знание закономерностей движения системы с распределенным трением позволяет корректно перейти к использованию

интегральных характеристик трения. Именно такие характеристики обычно учитываются при решении задач динамики систем с неидеальными связями.

Оригинальные работы по исследованию проблем динамики систем с трением, связанных с парадоксом Пэнлеве, принадлежат О.П. Жилиной, С.Н. Кожевникову, Ле Суан Аню, Ю. И. Неймарку и Н.А. Фуфаеву [8, 10, 12, 14].

Особый раздел механики представляют исследования нелинейных динамических систем, обладающих (ввиду присутствия зазоров) разрывными характеристиками, — так называемых *виброударных систем*. Их отличительной особенностью является скачкообразное изменение фазовых переменных в моменты переключения режимов. В большинстве работ соударение трактуется как коллинеарное, когда контактирующие элементы движутся вдоль некоторой прямой как до, так и после взаимодействия. Однако существует обширный класс систем с ударными парами, в которых реализуется косое или даже пространственное соударение. При этом возникают касательные ударные импульсы, для описания которых приходится вводить те или иные допущения о характере ударного трения. Особенности удара с трением и связанные с этим эффекты прекращения и изменения направления скольжения рассматривались еще Э.Дж. Раусом [19], Г. Дарбу, А. Майером и др.

Указанные идеи получили бурное развитие в современных исследованиях. При этом ударные взаимодействия с трением в ряде случаев осложняются наличием дополнительных удерживающих связей. Поэтому возникает особый тип удара, называемый обычно *стесненным*. В результате реализации такого процесса выявляется значительная совокупность нестандартных динамических свойств (многообразие режимов соударения, отличающихся различными кинематическими закономерностями, прекращение и смена направления скольжения при ударе, «сверхвосстановление» относительной скорости звеньев, возникновение *виброударных автоколебаний* и так далее). Указанные явления подробно изучены в трудах профессора В.Л. Вейца и его сотрудников (в том числе, автора) [5, 6, 23], а также иностранных ученых [24, 25]. Используемая в указанных исследованиях *стереомеханическая модель* стесненного удара с трением представляется плодотворной и позволяет получить новые важные результаты и в теоретическом, и в прикладном направлении.

### Литература

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. — М.: Физматгиз, 1960. — 487 с.
2. *Болотов Е.А.* О движении материальной плоской фигуры, стесненной связями // Матем. сб. 1906. Т. 25. — С. 17–23.
3. *Бутенин Н.В.* Рассмотрение «вырожденных» динамических систем с помощью гипотезы «скачка» // ПММ. 1948. Т. 12. Вып.1. — С. 3–22.
4. *Вейц В.Л.* Динамика машинных агрегатов. — Л.: Машиностроение. 1969. — 370 с.
5. *Вейц В.Л., Васильков Д.В., Гидаспов И.А., Шнеерсон Е.З.* Динамика приводов технологических машин с самотормозящимися механизмами. — СПб.: Изд-во СПб ИМАШ, 2003. — 162 с.
6. *Вейц В.Л., Шнеерсон Е.З.* Об одной обобщенной модели ударного взаимодействия в самотормозящейся системе // Пробл. машиностр. и надежн. машин. 2000. № 1. — С. 16–22.
7. *Гидаспов И.А., Вейц В.Л.* Динамика самотормозящихся механизмов. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. — 144 с.
8. *Жилина О.П.* К динамике систем с трением / Тр. XXIV школы-семинара «Анализ и синтез нелинейных механических систем». — СПб.: ИПМаш РАН, 1997. — С. 338–350.

9. *Иванов А.П.* О корректности основной задачи динамики в системах с трением // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. — С. 712–716.
10. *Кожевников С.Н.* О парадоксах Пэнлве // Прикл. механика. 1967. Т. 3. Вып. 1. — С. 119–126.
11. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т. 2. Ч. 2. — М.: ИЛ, 1951. — 555 с.
12. *Ле Суан Ань.* Динамика систем с кулоновым трением (теория и эксперимент). — СПб.: Нестор, 1999. — 300 с.
13. *Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.* Курс теоретической механики. Т. 2. — М.: Наука, 1983. — 640 с.
14. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Парадоксы Пэнлве и динамика тормозной колодки // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 3. — С. 366–375.
15. *Опейко Ф.А.* Математическая теория трения. — Минск: Наука и техника, 1971. — 152 с.
16. *Парс Л.А.* Аналитическая динамика. — М.: Наука, 1971. — 636 с.
17. *Пожарицкий Г.К.* Распространение принципа Гаусса на системы с сухим трением // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 3. — С. 391–406.
18. *Пэнлве П.* Лекции о трении. — М.: Гостехиздат, 1954. — 316 с.
19. *Раус Э.Дж.* Динамика системы твердых тел. Т. 1. — М.: Наука, 1983. — 464 с.
20. *Румянцев В.В.* О системах с трением // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 6. — С. 969–977.
21. *Турпаев А.И.* Самотормозящиеся механизмы. — М.: Машиностроение, 1976. — 208 с.
22. *Четаев Н.Г.* О некоторых связях с трением // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 1. — С. 35–38.
23. *Шнейерсон Е.З.* О стесненных ударных взаимодействиях в существенно нелинейных динамических системах // Тр. XVIII Межд. симпоз. «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем». — М.: ИМАШ РАН, 2015. — С. 311–315.
24. *Brach R.M.* Friction restitution and energy loss in planar collision // Journal of Applied Mechanics, vol. 51, iss. 1, p. 164–170. — DOI:10.1115/1.3167562.
25. *Stronge W.J.* Rigid body collisions with friction // Proceedings of the Royal Society A, 1990, vol. 431, iss. 1881, p. 169–181. — DOI:10.1098/rspa.1990.0125.