

УДК 556.536

*Н.Б. Барышников, М.С. Дрегваль, Д.И. Исаев, И.С. Гаврилов*

## ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ И СКОРОСТНЫЕ ПОЛЯ ПОТОКОВ В РУСЛАХ СЛОЖНЫХ ФОРМ СЕЧЕНИЯ

Российский государственный гидрометеорологический университет,  
kafedra\_gm@rshu.ru

*N.B. Baryshnikov, M.S. Dregval, D.I. Isaev, I.S. Gavrilov*

## HYDRAULIC RESISTANCES AND VELOCITY FIELDS OF FLOWS IN RIVERBEDS WITH COMPLICATED CROSS-SECTIONS

В статье приведены результаты анализа методов расчетов гидравлических сопротивлений натуральных русловых потоков. Установлено их несовершенство. Показано, что особенно велики погрешности расчетов на реках с поймами, достигающие нескольких сотен процентов. Рекомендовано совершенствование расчетных методов за счет учета в них эффекта взаимодействия потоков. Приведены результаты разработки методики расчетов средних на вертикалях скоростей русловых потоков на пойменных гидростворах. Решение данной проблемы имеет существенное значение для ведения водного хозяйства и расчетов речной гидравлики и гидротехники.

**Ключевые слова:** русло, пойма, гидравлические сопротивления, русловые и пойменные потоки, эффект взаимодействия потоков, средние и средние на вертикалях скорости, коэффициент шероховатости.

The paper presents the results of computations of hydraulic resistances of flows in natural riverbeds and reveals their significant uncertainty. The most significant errors (up to several hundred per cent) were found for rivers with floodplains. The paper recommends improving computational methods with the account of the flow interaction effect and provides the results of developing a computational method for average velocities on vertical profiles, i.e. suitable for stream gauges located on floodplains. The solution to this problem is essential for water management and calculation of river hydraulics and hydraulic engineering.

**Keywords:** riverbed, floodplain, hydraulic resistances, river bed and flood plain flows, flows interaction effect, average velocity, average velocity on verticals, roughness coefficient.

Проблема гидравлических сопротивлений, имеющая большое практическое значение, к сожалению, до настоящего времени еще далека от решения. Несмотря на более чем 200-летний период исследований эта проблема остается нерешенной в речной гидравлике. Объяснением этому является зависимость сопротивлений

от очень большого количества определяющих факторов. Действительно, к основным факторам, определяющим величину сопротивлений, следует отнести высоту выступов шероховатости речных русел, форму перемещения наносов (грядовую или безгрядовую), глубины потоков, форму сечения русел, особенно на малых реках, их зарастаемость растительностью, чередование по длине плесовых и перекатных участков, воздействие эффекта взаимодействия руслового и пойменного потоков, режим их движения, равномерный или неравномерный, стационарный или нестационарный и многие другие.

Такое положение привело к необходимости введения в формулы для расчетов гидравлических сопротивлений дополнительных параметров, в частности коэффициентов шероховатости, являющихся интегральной характеристикой всех видов сопротивлений, субъективно определяемых на основе сведений по описанию сопротивлений расчетного участка. Для определения этого коэффициента, как правило, обозначаемого параметром  $n$ , были разработаны многочисленные таблицы, которые непрерывно совершенствовались на основе дополнительной натурной информации. В настоящее время в РФ наиболее часто используются таблицы М.Ф. Срибного [2] и И.Ф. Карасева [5]. Последняя является усовершенствованной таблицей Срибного на основе данных о 800 натуральных измерений расходов воды, в основном детальным способом. За рубежом наиболее часто используют соответствующие таблицы, составленные В.Т. Чоу [8] и Дж. Бредли [2, 4]. Для повышения точности определения коэффициента шероховатости таблица В.Т. Чоу снабжена альбомом цветных фотографий.

Выполним краткий анализ недостатков как самих коэффициентов шероховатости, так и таблиц для их определения.

Основными недостатками коэффициентов шероховатости, по нашему мнению, являются их размерность и необходимость для их расчетов использования теории равномерного движения. Первый недостаток можно проиллюстрировать на примере формулы Павловского в виде:

$$C = \frac{h^y}{n} \text{ или } n = \frac{h^y}{C}, \quad (1)$$

где  $C$  – коэффициент Шези;  $h$  – средняя глубина потока;  $y$  – переменный параметр:

$$y \cong 1,5 \sqrt{n} \text{ при } h \leq 1 \text{ м;}$$

$$y \cong 1,5 \sqrt{n} \text{ при } h > 1 \text{ м.} \quad (2)$$

Как видно из (1), при использовании этой методики размерность коэффициента шероховатости будет переменной, что недопустимо для любой физической величины.

Другим весьма существенным недостатком, как уже указывалось, является субъективизм определения величины коэффициента шероховатости по описательной характеристике и соответствующим таблицам для его определения. Так, в таблице Чоу при одинаковой описательной характеристике приводится диапазон его значений, различающихся примерно в два раза.

Далее, практически во всех таблицах, кроме малоизвестной таблицы Л.Л. Лиштвана, к сожалению, не опубликованной в широкой печати, не учитывается влияние

глубин, хотя величина коэффициента шероховатости при изменении глубин, особенно на малых реках, может изменяться в два и более раз. Также в этих таблицах недостаточно учтено влияние формы сечения речных русел, характеризуемое параметром  $B/h$ , хотя последние исследования показывают, что на малых и средних реках их влияние весьма существенно [2, 4 и др.].

Следует отметить, что в последние годы были проведены глубокие исследования по выявлению влияния этих параметров на значения коэффициентов шероховатости [2, 3 и др.]. В частности, особенно детальные исследования по данной проблеме были проведены в РГГМУ [2, 4]. Установлено, что ни одна из многочисленных формул, отражающих влияние формы сечения русла через  $B/h$  на гидравлические сопротивления, не может быть признана эффективной. Влияние параметра  $B/h$  на величину коэффициента шероховатости по различным данным [1, 2, 5 и др.] ограничивается величинами  $B/h$  40–60.

Особенно важным является выявление влияния глубин на коэффициенты шероховатости. Так, исследования, проводимые в РГГМУ [2, 4 и др.], позволили выявить пять типов зависимостей вида  $\frac{C}{C} = f\left(\frac{h}{h}\right)$  или  $\frac{n}{n} = f\left(\frac{h}{h}\right)$ . При этом установлено, что эти зависимости близки к зеркальному их отображению. Вид этих зависимостей, по мнению авторов [2, 5, 7 и др.], определяется особенностями морфологического строения расчетного участка, степенью зарастания растительностью русла и берегов в расчетном створе и характером расположения русловых образований относительно этого створа (рис. 1).

Действительно, как видно на рис. 1, для группы рек (I) наблюдается увеличение значений коэффициентов Шези вида  $\frac{C}{C} = f\left(\frac{h}{h}\right)$  и, соответственно, уменьшение коэффициентов шероховатости  $\frac{n}{n} = f\left(\frac{h}{h}\right)$  при увеличении глубин. Такой вид зависимостей вполне соответствует результатам расчетов по формулам Маннинга  $C = \frac{h^{1/6}}{n}$ , Павловского (1) или другим аналогичного вида, хотя влияние глубин более значительное, чем в расчетных формулах (1) и (2).

Для русел конкретных рек характер зависимостей может существенно отличаться от осредненной кривой, что объясняется особенностями морфологического строения расчетного участка, а также условиями расположения русловых образований относительно расчетного створа (см. рис. 1).

Как видно на рис. 1 (II), характер зависимостей  $\frac{C}{C} = f\left(\frac{h}{h}\right)$  или  $\frac{n}{n} = f\left(\frac{h}{h}\right)$  диаметрально противоположен приведенным на кривой рис. 1 (I). Действительно, наблюдается уменьшение значений коэффициентов Шези вида  $\frac{C}{C} = f\left(\frac{h}{h}\right)$  и увеличение коэффициентов шероховатости  $\frac{n}{n} = f\left(\frac{h}{h}\right)$  при увеличении глубин. Такой вид

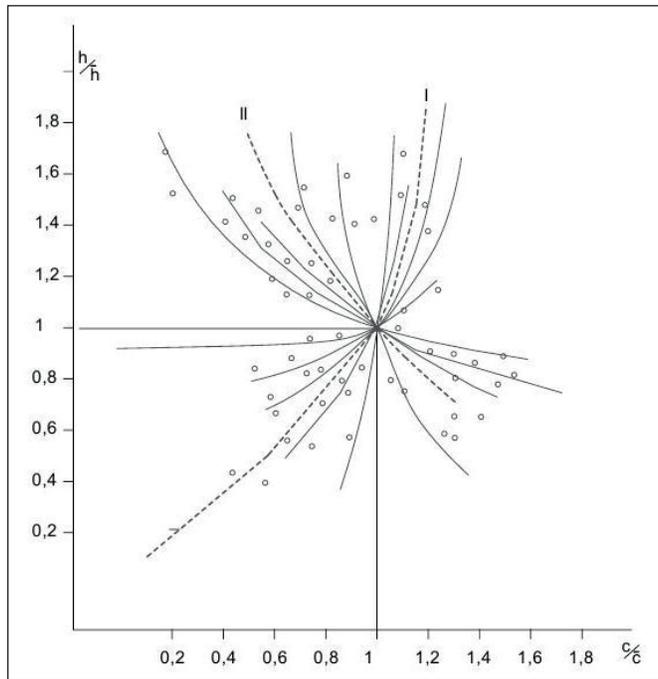


Рис. 1. График зависимости  $C/\bar{C} = f(h/\bar{h})$  для равнинных рек. I–II – кривые, осредненные для групп рек, полученные по данным наблюдений на конкретных реках

зависимостей противоположен результатам расчетов по приведенным выше формулам и объясняется как степень зарастания берегов и русла реки в расчетном створе, так и особенностями расположения русловых образований относительно этого створа. Третий и четвертый виды этих зависимостей (рис. 2) являются промежуточными между двумя предыдущими и обусловлены теми же причинами.

Пятый тип зависимости  $\frac{C}{\bar{C}} = f\left(\frac{h}{\bar{h}}\right)$  (рис. 2) характеризуется относительной стабильностью коэффициентов Шези и шероховатости при увеличении глубин, что присуще большим рекам.

Следует отметить сложность расчетов, связанную с определением средних расчетных значений  $\bar{C}$ ,  $\bar{n}$  и  $\bar{h}$ , в частности из-за ограниченности рядов измеренных расходов воды, используемых для расчетов осредненных величин.

Все эти зависимости (см. рис. 1 и 2) установлены для речных русел простых форм сечения. Для русел же сложных форм сечения, частным случаем которых являются русла с поймами, где необходимо учитывать эффект взаимодействия руслового и пойменного потоков, характер этих зависимостей значительно сложнее. Сложность проблемы в этом случае обусловлена, в частности [8], неравномерностью движения и необходимостью использования для расчетов уравнения движения потока с переменным по длине расходом воды вида:

$$I = \frac{V^2}{C^2 h} + \frac{\alpha_{кн} V_H^2 - \alpha_{кв} V_B^2}{2gL} + \frac{V - V_g}{gF} \frac{Q_H - Q_B}{L} + \frac{\alpha_B}{g} \frac{\Delta V}{\Delta t}, \quad (3)$$

где  $I$  – уклон водной поверхности;  $\alpha_{к}$  и  $\alpha_{б}$  – коэффициенты Кориолиса и Буссинеска;  $L$  – расстояние между расчетными створами; «н» и «в» – индексы, означающие, что параметры относятся к нижнему или верхнему створам;  $V_g$  и  $F$  – соответственно средние скорости и площади водообмена между русловым и пойменным потоками.

Сложность применения этой методики обусловлена необходимостью иметь натурную или лабораторную информацию по двум близко расположенным на расстоянии  $L$  гидростворам, причем величина  $L$  не является определенной. Более того, целесообразность применения уравнения (3) определяется значимостью величин его инерционных членов. Для их оценки была использована натурная информация, полученная сотрудниками ГГИ под руководством Д.Е. Скородумова [8], по данным специальных наблюдений на реках Луге – пос. Толмачево и Пьяне – д. Камкино.

Максимальное значение первого инерционного члена правой части уравнения 3 вида:

$$\left(\frac{\epsilon_1}{I}\right)_{\max} = \frac{1}{I} \left( \frac{\alpha_{кн} v_H^2 - \alpha_{кв} v_B^2}{2gL} \right) \approx 59\%, \text{ а третьего } \frac{\alpha_B}{g} \frac{\Delta v}{\Delta t} \approx 5\%, \text{ т. е. пренебрежимо мало.}$$

Величина максимального значения второго инерционного члена уравнения (3) по данным Скородумова составила 24,5 %. Н.Б. Барышников [2, 4 и др.] по лабораторным данным, соответственно, получил максимальные значения первого

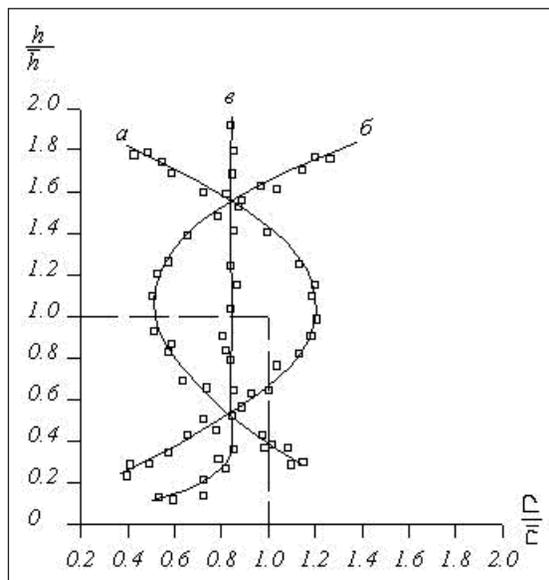


Рис. 2. График зависимости  $C/\bar{C} = f(h/\bar{h})$  (разные типы кривых):  
а – третий тип; б – четвертый тип; в – пятый тип

и второго инерционных членов уравнения (3), равными 70 и 25 %, т. е. близкими к данным Скородумова [8]. Следовательно, учет первого и второго членов уравнения при расчете средних скоростей и расходов воды русловых составляющих таких сложных потоков является обязательным.

В РГГМУ для расчетов средних скоростей русловых составляющих потоков по натурным данным были получены графические зависимости вида:  $v_p/v_{p,б} = f(h_p/h_{p,б}, \alpha)$  и  $I_p/I_{p,б} = f(h_p/h_{p,б}, \alpha)$ , приведенные на рис. 3 и 4 [2, 3, 4].

Как видно на этих рисунках, для каждого типа взаимодействия (второго и третьего) получены свои расчетные зависимости.

Недостатком этой методики, в случае отсутствия натуральных данных, является необходимость определения расчетных значений средних скоростей  $v_{p,б}$  и уклонов водной поверхности  $I_{p,б}$  при уровнях затопления бровок прирусловых валов (р. б). В частности, при расчетах  $v_{p,б}$  делается допущение о квазиравномерном режиме движения русловой составляющей потока при уровне  $H_{p,б}$ , что позволяет применить для расчетов формулу Шези совместно с формулами Маннинга, Павловского или других аналогичных им формул. Как показал анализ результатов расчетов коэффициентов шероховатости русел простых форм сечения, выполненных на основе натуральных данных более чем по 500 постам, средняя погрешность расчетов составляет величину 30–35 % (в зависимости от используемой расчетной таблицы) при максимальных погрешностях, превышающих сотни процентов [1].

Значительно сложнее расчет средних на вертикалях скоростей русловых потоков. Для русел простых форм сечения рекомендуется методика расчетов, в частности А.В. Караушева [7], основанная на теории равномерного движения, т. е. на формуле Шези. Результаты ее анализа и контрольные расчеты, основанные на независимой натурной информации, позволяют утверждать, что средние погрешности расчетов составляют около 30 %. Значительно хуже обстоит дело

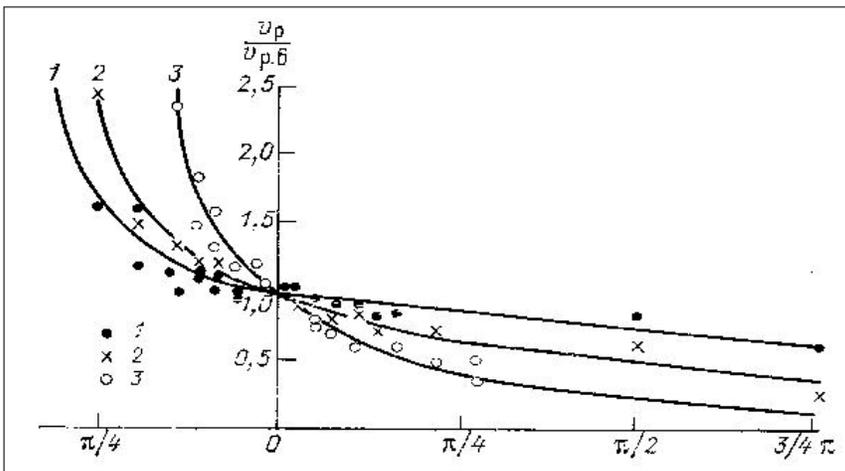


Рис. 3. Кривые  $V_p/V_{p,б} = f(h_p/h_{p,б}, \alpha)$ , где  $1 - h_p/h_{p,б} = 1,10$ ;  $2 - h_p/h_{p,б} = 1,25$ ;  $3 - h_p/h_{p,б} = 1,50$

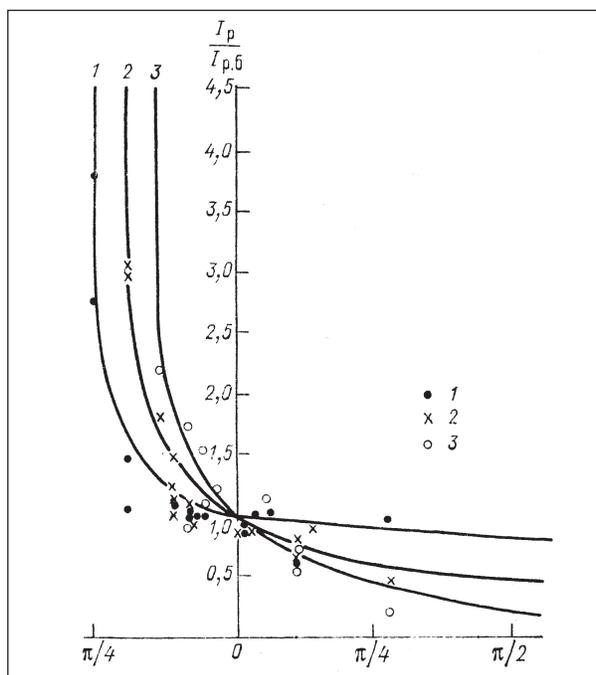


Рис. 4. Кривые  $I/I_{p.б} = f(h_p/h_{p.б}, \alpha)$ ,  
 где 1 -  $h_p/h_{p.б} = 1,10$ ; 2 -  $h_p/h_{p.б} = 1,25$ ; 3 -  $h_p/h_{p.б} = 1,50$

с методикой расчетов этих скоростей потоков при их взаимодействии с потоками поймы, при этом погрешности расчетов могут достигать сотен процентов, что значительно превышает допустимые пределы. Такие большие погрешности обусловлены неучетом воздействия эффекта взаимодействия потоков.

Н.Б. Барышниковым [4] была предпринята попытка получения зависимости вида  $n_p/n_{p.б} = f(h_p/h_{p.б}, \alpha)$ , аналогичной зависимостям для расчетов средних скоростей и уклонов водной поверхности, приведенным на рис. 3 и 4. Однако большой разброс натуральных данных в поле координат  $[n_p/n_{p.б} = f(h_p/h_{p.б}, \alpha)]$  не позволил выявить достаточно надежные зависимости, поэтому был применен прием, основанный на использовании графических зависимостей, приведенных на рис. 3 и 4, заключающийся в следующем. Зависимость относительных значений коэффициентов шероховатости  $n_p/n_{p.б}$  от определяющих факторов была представлена в виде:

$$\frac{n_p}{n_{p.б}} = \frac{(h_p/h_{p.б})^{2/3} (I_p/I_{p.б})^{0,5}}{v_p/v_{p.б}} \quad (4)$$

Затем, задаваясь значениями угла  $\alpha$  через каждые  $5^\circ$ , по графикам, приведенным на рис. 3 и 4, были определены соответствующие углам  $\alpha$  значения  $n_p/n_{p.б}$  при постоянных значениях относительных глубин  $h_p/h_{p.б}$ . На основе этой информации были построены графические зависимости  $n_p/n_{p.б} = f(h_p/h_{p.б}, \alpha)$ , приведенные на рис. 5.

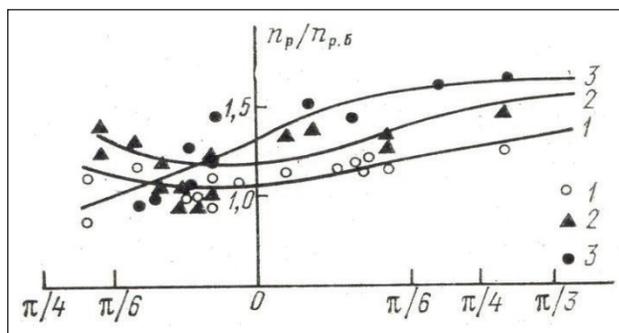


Рис. 5. Зависимость  $n_p/n_{p,б} = f(h_p/h_{p,б}, \alpha)$ .  
 1 -  $h_p/h_{p,б} = 1,10$ ; 2 -  $h_p/h_{p,б} = 1,25$ ; 3 -  $h_p/h_{p,б} = 1,50$

Корреляционные отношения этих зависимостей недостаточно высокие 0,6–0,7, что не позволяет рекомендовать их в качестве расчетных.

По-видимому, разработки в этом направлении следует продолжить. В частности, перспективным направлением на данном этапе является совершенствование таблиц, для определения коэффициентов шероховатости за счет учета в них глубин и параметров, характеризующих воздействие эффекта взаимодействия потоков.

Гидравлические сопротивления – основной фактор, учет которого является обязательным при разработке методики расчетов скоростных полей русловых потоков. Поэтому вторым направлением, помимо гидравлических сопротивлений, являлось совершенствование методики расчетов средних и средних на вертикалях скоростей русловых потоков. Действительно, как показал анализ опубликованных работ и результаты собственных расчетов авторов [1, 3 и др.], для меженных русел достаточно эффективной является методика расчетов, основанная на формулах Шези–Маннинга, Шези–Павловского или аналогичных им. При этом средние погрешности расчетов в зависимости от используемой таблицы для определения коэффициентов шероховатости изменяются в пределах 30–35 %. Значительно хуже обстоит дело с расчетами средних скоростей русловых потоков, находящихся под воздействием потоков поймы. Поэтому на кафедре гидрометрии была разработана эмпирическая методика, позволяющая рассчитывать средние скорости таких потоков, на основе графической зависимости  $v_p/v_{p,б} = f(h_p/h_{p,б}, \alpha)$ , приведенной на рис. 1.

Для получения этой зависимости была использована натурная информация более чем по 60 постам Гидрометслужбы на территории бывшего СССР. Слабым местом этой методики является необходимость расчетов значений  $v_{p,б}$  по методике, основанной на формуле Шези, т. е. при условии квазиравномерного движения.

В то же время методика расчетов средних на вертикалях скоростей русловых потоков, в частности разработанная А.В. Караушевым [7], также основана на формуле Шези, т. е. на условиях равномерного движения. Применение этой методики к потокам в меженных руслах позволяет получить удовлетворительные результаты [1, 2, 3 и др.].

Значительно худшие результаты были получены при расчетах средних на вертикалях скоростей русловых потоков, находящихся под воздействием пойменных потоков [4, 5]. При этом погрешности расчетов составили сотни процентов.

Для совершенствования методики, на основе анализа дополнительной натурной информации была уточнена графическая зависимость  $\frac{\Delta \bar{v}_p}{v_{изм}} = f(\alpha)$ , полученная ранее [4, 5] для условий третьего типа взаимодействия потоков, т. е. условий, когда пойменный поток, вторгаясь в русловый, тормозит его, что приводит к трансформации поля скоростей и резкому уменьшению средних и максимальных на вертикалях скоростей.

Здесь  $\Delta v$  – разница между измеренными  $v_{изм}$  и рассчитанными на основе формулы Шези  $v_p$  значениями средних на вертикалях скоростей, т. е.  $\Delta v_p = v_{изм} - v_p$ .

Полученная графическая зависимость (рис. 6) основана на допущении о том, что резкое уменьшение средних на вертикалях скоростей обусловлено воздействием эффекта взаимодействия русловых и пойменных потоков. Значительное отклонение данных по р. Нестеровке от расчетной зависимости (см. рис. 6) обусловлено не учетом периода релаксации при расчете осредненного значения угла  $\alpha$  при пятом типе взаимодействия потоков. Учет же релаксации необходим, так как при присоединении дополнительного отсека пойменного потока происходит противодействие этого отсека с предшествующим отсеком пойменного потока.

В 2016 г. исследования в этом направлении были продолжены на основе дополнительного объема натурной информации (табл. 1).

*Таблица 1*

Сведения о погрешностях расчетов средних на вертикалях скоростей русловых потоков по методике Караушева, находящихся под воздействием пойменных потоков

№	Река, пост	Тип взаимодействия	Угол $\alpha^0$	Погрешности расчетов, %	
				$(\frac{\Delta \bar{v}}{v_{изм}})_{ср}$	$(\frac{\Delta \bar{v}}{v_{изм}})_{макс.}$
1	р. Ветлуга, д. Быстри	III	50	215	373
2	р. Ветлуга, Дубники	III	3	23,1	82
3	р. Конда, д. Чантырья	III	30	130	183
4	р. Амур – д. Кумара	III	4	9,5	23
5	р. Крыловка, д. Крыловка	V	9	84	109
6	р. Нестеровка, рзд. Таловый	V	22	145	311
7	р. Луга, Толмачево	III	20	26	42
8	р. Бобр, с. Куты	IV–III	15	42	70
9	р. Аремзянка, д. Чукманка	IV–III	10	40	57
10	р. Тяжин, пос. Старый Тяжин	III	5	35	73
11	р. Пьяна, д. Камкино	II (IV)	45	30	35
12	р. Луга, г. Луга	II	5	12	19
13	р. Луга, пос. Воронино	II	3	7	12
14	р. Горынь, п. Оженин	II	10	8	15

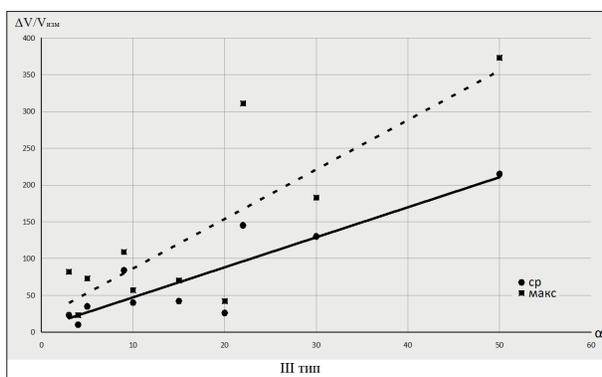


Рис. 6. Зависимости средних и максимальных погрешностей расчетов средних на вертикалях скоростей русловой составляющей потока от углов  $\alpha$

Как видно, в таблице приведены данные только по 4 объектам при втором типе взаимодействия потоков, что позволило получить только ориентировочную зависимость вида  $\frac{\Delta \bar{v}}{\bar{v}_{изм}}$  и для второго типа взаимодействия потоков (рис. 7) и уточ-

нить аналогичную зависимость для условий третьего типа взаимодействия потоков (см. рис. 6). При этом было принято считать углы  $\alpha$  отрицательными при втором и положительными – при третьем типе взаимодействия потоков. Соответственно, и значения  $\Delta v$  – положительными при третьем и отрицательными при втором типах взаимодействия потоков.

Анализ информации, приведенной в табл. 1 и на рис. 6 и 7, позволяет сделать следующие выводы и рекомендации:

– погрешности расчетов по рекомендуемой методике, основанной на методике Караушева [7], при третьем типе взаимодействия потоков почти на порядок больше, чем при втором типе;

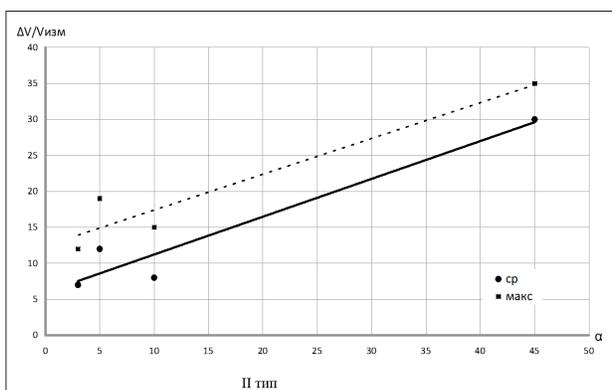


Рис. 7. Зависимости средних и максимальных погрешностей расчетов средних на вертикалях скоростей русловой составляющей потока от углов  $\alpha$

– исходя из этого, целесообразно располагать морфостворы на участках, ниже которых происходит расширение пойм.

В то же время необходимо отметить отсутствие натурной информации о скоростях в параллельных русловых и пойменных потоках. Это не позволяет вывести полученные зависимости на нулевую отметку.

Действительно, как показал анализ лабораторных данных, при параллельных потоках необходимо вводить в качестве третьего фактора глубину, что возможно только при наличии натурной информации.

### Выводы

Проведенный анализ и расчеты позволяют сделать следующие выводы и предложения:

– проблема гидравлических сопротивлений движению русловых потоков, к сожалению, еще далека от решения. Особенно острой она является для расчетов сопротивлений русел сложных форм сечения, в частности русел с поймами;

– необходимо повышать качество натурной информации, особенно на пойменных створах;

– наиболее перспективным направлением исследований в области гидравлических сопротивлений в настоящее время является совершенствование таблиц для определения коэффициентов шероховатости, посредством введения в них параметров, учитывающих влияние глубин, формы сечения русел и других. На пойменных створах необходим учет влияния эффекта взаимодействия потоков, в частности с помощью угла  $\alpha$ ;

– необходима дополнительная натурная и лабораторная информация для уточнения положения расчетной зависимости  $\frac{\Delta \bar{v}_p}{v_{изм}} = f(\alpha)$  при втором типе взаимодействия русловых и пойменных потоков;

– необходимо дальнейшее совершенствование методики расчетов средних на вертикалях скоростей русловых составляющих потоков, в частности за счет учета эффекта взаимодействия при других его типах.

### Литература

1. Барышников Н.Б. Речные поймы (морфология и гидравлика). – Л.: Гидрометеиздат, 1978. – 152 с.
2. Барышников Н.Б. Гидравлические сопротивления речных русел. – СПб.: РГГМУ, 2003. – 147 с.
3. Барышников Н.Б., Субботина Е.С., Овсейко П.П., Терентьев И.С. Гидравлические сопротивления движению потоков в руслах с поймами // Учен. зап. РГГМУ, 2014. № 36. – С. 29–37.
4. Барышников Н.Б. Динамика русловых потоков. – СПб.: РГГМУ, 2016. – 341 с.
5. Барышников Н.Б., Исаев Д.И., Гаврилов И.С., Дрегваль М.С. Взаимодействие русловых и пойменных потоков // Учен. зап. РГГМУ, 2016. № 44. – С. 14–22.
6. Карасев И.Ф. Речная гидрометрия и учет водных ресурсов. – Л.: Гидрометеиздат, 1980. – 310 с.
7. Караушев А.В. Речная гидравлика. – Л.: Гидрометеиздат, 1969. – 416 с.
8. Скородумов Д.Е. Вопросы гидравлики пойменных русел в связи с задачами построения и экстраполяции кривых расходов воды // Тр. ГГИ, 1965. Вып. 128. – С. 3–96.
9. Чоу В.Т. Гидравлика открытых каналов. – М.: Стройиздат, 1969. – 464 с.