

УДК 556.16.072:556.132.2

## УЧЕТ ИСПАРЕНИЯ ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ РЕЧНОГО СТОКА

*Е.В. Гайдукова, С.В. Шаночкин, М.А. Москалюк*

Российский государственный гидрометеорологический университет, oderiut@mail.ru

Рассматривается метод учета испарения при статистической обработке рядов речного стока. Метод основан на вычислении и построении поверхности плотности вероятности и получении условных, т. е. с учетом средних многолетних значений испарения, обеспеченных значений характеристик речного стока. Проведена апробация метода на речных бассейнах европейской части России. С использованием модели MPI-ESM-MR климатического сценария RCP4.5 на период 2046—2065 гг. получено, что чувствительными к изменению климата будут в основном 10 %-ные обеспеченные значения расхода воды рек средней полосы ЕЧР. Предлагаемый метод предназначен для более надежного прогнозирования статистических характеристик речного стока.

*Ключевые слова:* речной сток, испарение, двумерные плотности вероятности, условные кривые обеспеченности.

## EVAPORATION IN MATHEMATICAL MODELING OF THE RIVER BASIN RUNOFF

*E.V. Gaidukova, S.V. Shanochkin, M.A. Moskaluk*

Russian State Hydrometeorological University

The method of accounting for evaporation during statistical processing of river flow series is considered. The method is based on calculating and constructing surface probability densities and obtaining conditional ones, i.e. taking into account the mean annual evaporation values, provided values of the characteristics of the river flow. Approbation of the method in river basins of the European part of Russia was carried out. Using the MPI-ESM-MR model of the climate scenario RCP4.5 for the period 2046—2065, it was obtained that, in the main, ten percent of the ensured water discharge values for the rivers of the middle belt of the European territory of Russia will be climate-sensitive. The proposed method is designed to reliably predict the statistical characteristics of river flow.

*Keywords:* river runoff, evaporation, two-dimensional probability densities, conditional supply curves.

### Введение

Одной из задач математического моделирования является устранение неустойчивости решений прогностических моделей. Эта задача может решаться путем увеличения числа переменных, учитываемых в прогнозном выражении: например, помимо расхода воды, учитывается еще испарение и изменение суммарного влагозапаса речных бассейнов [3]. Уже разработана модель с двумя переменными, описывающая процесс формирования многолетнего речного стока, — это двумерное уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова [2]:

$$\frac{\partial p(\bar{x}, t)}{\partial t} = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [A(\bar{x}, t) p(\bar{x}, t)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [B_{ij}(\bar{x}, t) \cdot p(\bar{x}, t)], \quad (1)$$

где  $p$  — плотность вероятности вектора случайных величин  $\vec{x} = (Q, E)$  (здесь  $Q$  — речной сток,  $E$  — испарение);  $A$  и  $B$  — коэффициенты сноса и диффузии [2].

Решение уравнения (1) представляет собой изменение двумерной плотности вероятности  $p(Q, E)$  по времени, т. е. это уравнение позволяет рассчитывать прогнозные двумерные плотности вероятности.

В настоящей работе предлагается альтернативный уравнению (1) метод учета испарения при сценарной оценке речного стока. Цель исследования заключается в получении технологических алгоритмов построения фактической и прогнозной (сценарной) двумерной поверхности плотности вероятности, а также в построении условных кривых плотности вероятности и кривых обеспеченности. Под условными кривыми понимаются кривые, полученные с учетом среднего многолетнего значения (нормы) испарения для изучаемого речного бассейна.

### Метод учета испарения при статистической обработке рядов речного стока

#### *Построение поверхности плотности вероятности*

До сих пор алгоритм построения двумерных плотностей вероятности ограничивался построением двумерных гистограмм: по рядам данных о стоке и испарении строилась точечная зависимость (эллипс рассеяния) расхода воды и испарения  $Q = f(E)$ , поле точек делилось на равные диапазоны и подсчитывалось число точек в каждом диапазоне (см. рис. 1). Эти данные служили для построения эмпирической двумерной гистограммы.

Условная кривая плотности вероятности (кривая обеспеченности) строилась с использованием эллипса рассеяния путем нахождения значений, близких к норме испарения  $\Delta E$  (рис. 1) [6]. Такой подход отбрасывает редкие значения, которые

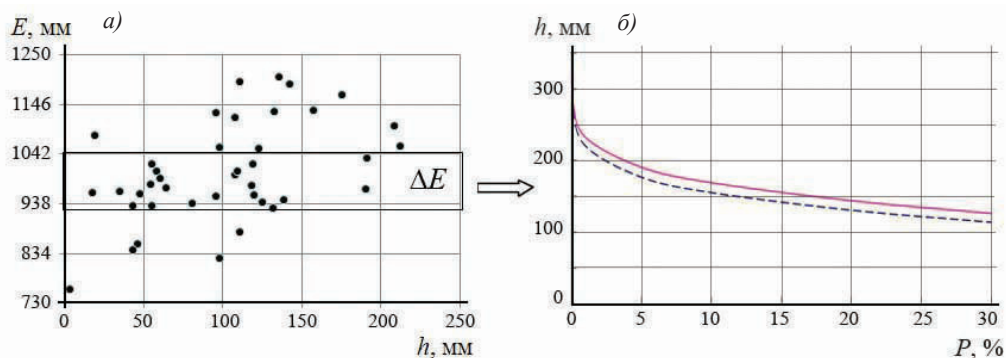


Рис. 1. Пример получения условных кривых обеспеченности (р. Alibori, ст. Route Kandi-Banikoara Aval, Западная Африка).

*a* — эллипс рассеяния, *b* — безусловная (верхняя кривая) и условная (нижняя кривая) обеспеченность [5].

могут провоцировать неустойчивость решений прогностического уравнения, но приводит к ошибкам около 30 % для коэффициента вариации.

По данным, приведенным в работе [5] для Западной Африки, отклонения условных обеспеченных значений от безусловных в среднем могут достигать 17 % для 0,1 %-ной обеспеченности и 10 % для 10 %-ной обеспеченности.

В данной статье предлагается получение условных кривых из теоретических поверхностей плотности вероятности, а не из эмпирических графиков.

Математическое выражение для построения двумерной поверхности плотности вероятности имеет вид

$$p(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_Q\sigma_E\sqrt{1-r_{QE}^2}} \exp(-\lambda^2), \quad (2)$$

где

$$\lambda^2 = \frac{1}{2(1-r_{QE}^2)} \left[ \frac{(Q-\bar{Q})^2}{\sigma_Q^2} - \frac{2r_{QE}(Q-\bar{Q})(E-\bar{E})}{\sigma_Q\sigma_E} + \frac{(E-\bar{E})^2}{\sigma_E^2} \right],$$

$\sigma_Q$  — среднееквадратическое отклонение по ряду стока,  $\sigma_E$  — среднееквадратическое отклонение по ряду испарения,  $r_{QE}$  — коэффициент корреляции между рядами стока и испарения,  $\bar{Q}$  и  $\bar{E}$  — средние значения стока и испарения,  $Q$  и  $E$  — значения стока и испарения в каждом узле расчетной сетки.

Алгоритм получения условных кривых обеспеченности показан на рис. 2. «Колокольчик» двумерной плотности вероятности как бы «разрезается» по норме испарения, и вид спереди по оси испарения представляет собой уже условную (т. е. при условии, что значение испарения равно его норме) кривую плотности вероятности.

Алгоритм был запрограммирован в компьютерном приложении *MatLab*.

В результате сравнения обеспеченных значений, вычисленных по методу-прототипу и предлагаемым методом, получено, что наибольшие расхождения наблюдаются при малой обеспеченности (0,1 %-ная обеспеченность — расхождение 16 %, 1 %-ная — 8 % и 10 %-ная — 4 %); последний метод дает меньшие значения. Сравнение этих значений производилось по 15 речным бассейнам (см. таблицу), расположенным на европейской части России (ЕЧР).

### **Прогнозирование поверхности плотности вероятности**

Для долгосрочного прогноза (сценарной оценки) значений плотности вероятности по уравнению (2) необходимо знание сценарных значений  $\sigma_Q$ ,  $\sigma_E$ ,  $r_{QE}$ ,  $\bar{Q}$  и  $\bar{E}$ . Практически все эти характеристики, кроме коэффициента корреляции между рядами стока и испарения  $r_{QE}$ , можно получить по методике, основанной на системе алгебраических уравнений для начальных статистических моментов, полученной путем аппроксимации одномерного уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова. Данная методика подробно описана в методических рекомендациях [4] и широко апробирована для речного стока и испарения (см., например, [1]).

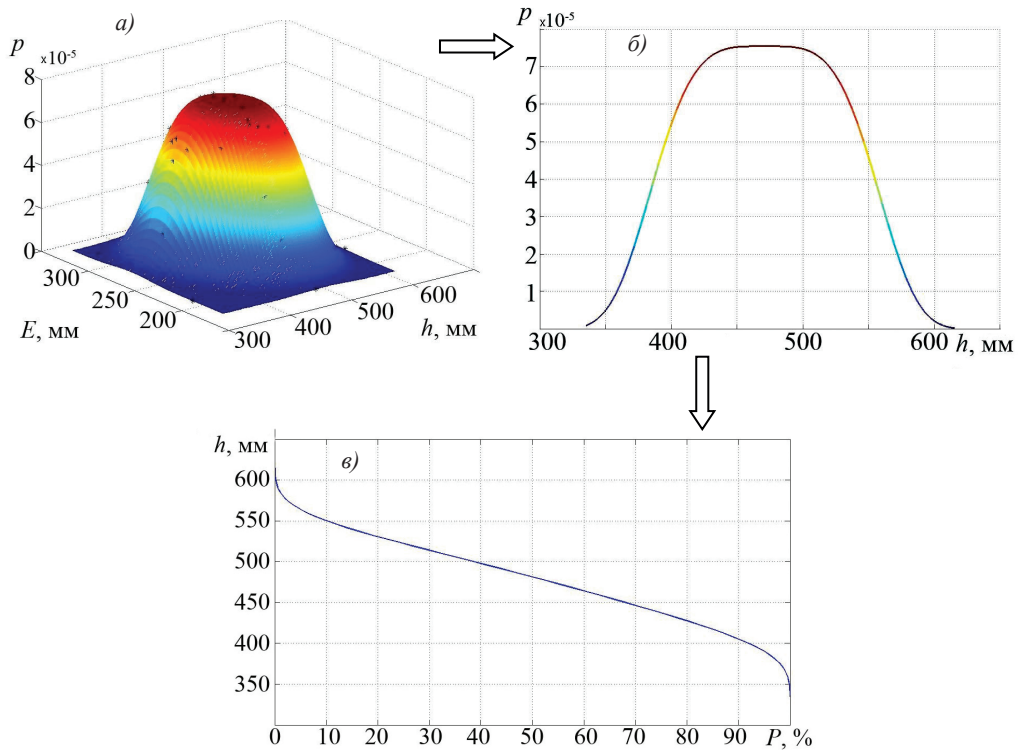


Рис. 2. Алгоритм получения условных кривых обеспеченности из двумерной поверхности плотности вероятности.

*a* — теоретическая плотность вероятности с нанесенными эмпирическими точками двумерной плотности вероятности, *б* — условная плотность вероятности, *в* — условная кривая обеспеченности.

Основная расчетная система выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} -\bar{c}m_1 + \bar{N} &= 0, \\ -2\bar{c}m_2 + 2\bar{N}m_1 + G_{\bar{N}} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\bar{c} = 1/k$ ;  $k$  — коэффициент стока или испарения, который может оставаться неизменным или меняться в новых климатических условиях в зависимости от прогнозной нормы температуры приземного воздуха;  $\bar{N} = \bar{X}$  — норма осадков;  $m_1$  — первый начальный момент по ряду стока или испарения;  $m_2$  — второй начальный момент;  $G_{\bar{N}}$  — интенсивность климатического шума (остается неизменной в новых климатических условиях).

Итак, входными данными в прогнозной методике являются сценарные нормы осадков и температуры приземного воздуха.

Следует отметить, что сценарные характеристики испарения можно взять без вычисления, напрямую, из климатической модели MRI-CGCM3 пятого доклада

МГЭИК. Это единственная модель на сайте распространения данных климатических изменений, рассчитывающая сценарные значения испарения [11].

### Применение метода

Было выбрано 15 речных бассейнов, расположенных на европейской части России (рис. 3). Критерии выбора водосборов заключались в следующем: площадь водосбора должны находиться в зональных пределах (от 1000 до 50 000 км<sup>2</sup>) и ряды наблюдений за стоком на выбранных водосборах должны иметь достаточную (более 25 лет) продолжительность для надежной статистической оценки [7]. Ряды испарения рассчитывались методом Константинова, погрешность которого составляет 16 % [8]. Длина совместных рядов испарения и стока ограничена периодом 1951—1988 гг. (в этом периоде, от которого будет даваться прогноз, речной сток испытывает минимальное воздействие изменяющегося климата).

В таблице представлены результаты вычисления слоя стока 0,1; 1 и 10 %-ной обеспеченности по безусловным (без учета испарения) и условным распределениям. Отклонения (O) обеспеченных величин рассчитывались по формуле

$$O = ((B - Y) / B) \cdot 100 \%,$$

где B и Y — обеспеченные значения, найденные по безусловной и условной кривым распределения соответственно.

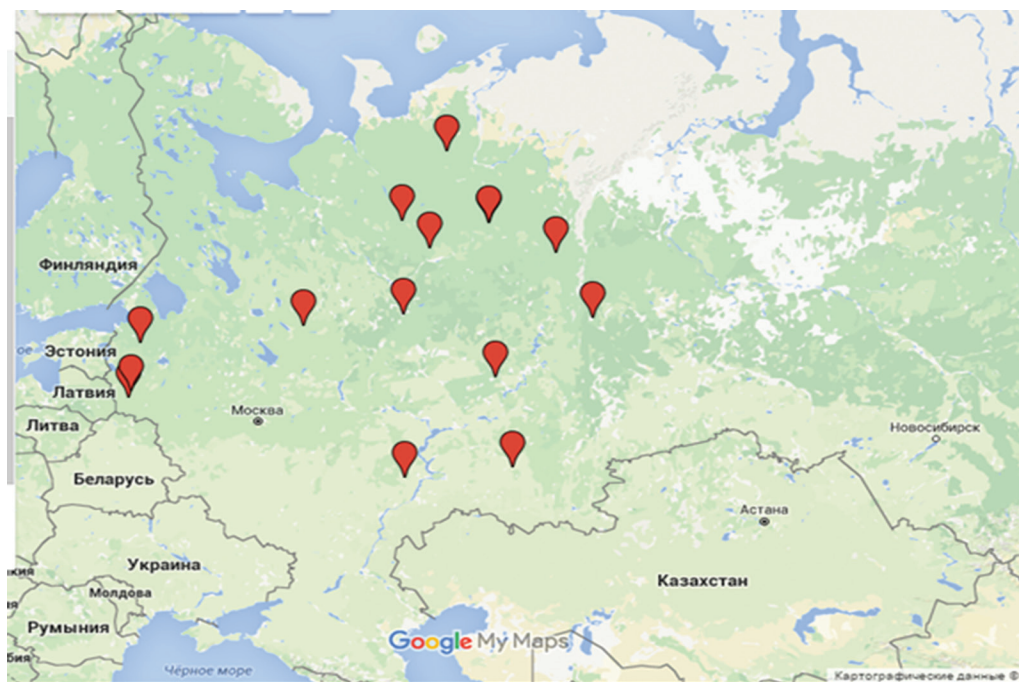


Рис. 3. Местоположение выбранных водосборов.

Отклонения встречаются с разными знаками, но в целом (среднем арифметическом) условные распределения имеют меньшие значения, причем они тем меньше, чем меньше обеспеченность.

Таблица

Сопоставление безусловных (Б) и условных (У) обеспеченных значений речного стока

| № п/п | Река, пункт            | Обеспеченность, % |     |      |     |     |      |     |     |       |
|-------|------------------------|-------------------|-----|------|-----|-----|------|-----|-----|-------|
|       |                        | 0,1               |     |      | 1   |     |      | 10  |     |       |
|       |                        | Б                 | У   | О, % | Б   | У   | О, % | Б   | У   | О, %  |
| 1     | Паша, с. Часовенское   | 618               | 505 | 18,3 | 548 | 501 | 8,7  | 458 | 461 | -0,60 |
| 2     | Луга, г. Кингисепп     | 473               | 374 | 20,8 | 404 | 357 | 11,6 | 320 | 322 | -0,77 |
| 3     | Великая, д. Гуйтово    | 444               | 353 | 20,6 | 378 | 334 | 11,8 | 299 | 299 | 0,00  |
| 4     | Сорочь, д. Осинкино    | 439               | 331 | 24,7 | 375 | 329 | 12,2 | 294 | 316 | -7,43 |
| 5     | Сухона, г. Тотьма      | 522               | 414 | 20,8 | 455 | 393 | 13,7 | 368 | 358 | 2,95  |
| 6     | Юг, д. Гаврино         | 525               | 397 | 24,3 | 444 | 367 | 17,3 | 348 | 338 | 2,86  |
| 7     | Яренга, с. Тохта       | 528               | 447 | 15,4 | 470 | 443 | 5,58 | 385 | 408 | -5,80 |
| 8     | Вашка, д. Рещельская   | 511               | 431 | 15,6 | 458 | 414 | 9,42 | 388 | 385 | 0,85  |
| 9     | Сызранка, с. Репьевка  | 189               | 150 | 20,5 | 160 | 150 | 5,86 | 126 | 146 | -16,0 |
| 10    | Дема, д. Бочкарева     | 275               | 206 | 25,1 | 226 | 197 | 13,0 | 167 | 174 | -4,07 |
| 11    | Чепца, с. Полом        | 363               | 319 | 12,1 | 318 | 299 | 5,85 | 258 | 273 | -5,76 |
| 12    | Печора, с. Тр.-Печорск | 717               | 605 | 15,6 | 647 | 586 | 9,44 | 560 | 550 | 1,74  |
| 13    | Ижма, с. Усть-Ухта     | 483               | 407 | 15,7 | 435 | 397 | 8,70 | 376 | 372 | 1,12  |
| 14    | Ухта, г. Ухта          | 517               | 450 | 12,9 | 466 | 446 | 4,26 | 402 | 411 | -2,38 |
| 15    | Цильма, с. Трусово     | 506               | 446 | 11,9 | 470 | 442 | 6,09 | 416 | 414 | 0,36  |
|       | Среднее отклонение, %  |                   |     | 18,3 |     |     | 9,57 |     |     | -2,20 |

По методу, изложенному выше, были получены фактические и сценарные теоретические поверхности плотности вероятности и условные кривые обеспеченности. Пример поверхностей и кривых представлен на рис. 4.

Можно наблюдать, что при объединении стока и испарения коэффициент асимметрии стремится к нулю. Физика данного процесса подробно рассмотрена в [2].

На рис. 5 представлены данные фактических и сценарных условных значений обеспеченности. Сценарные оценки делались по модели Института Макса Планка (MPI-ESM-MR) климатического сценария RCP4.5 на период с 2046 по 2065 г. [10]. Выбор данной модели обосновывается результатами проведенных многочисленных исследований по ее апробации на ретроспективном материале, показывающим удовлетворительную согласованность модельных и натурных значений для количества осадков и температуры приземного воздуха (см., например, [9, 12]).

Получено, что изменение климата скажется в основном на 10 %-ных обеспеченных значениях, особенно в случае водосборов, расположенных в средней полосе ЕЧР. Для речного бассейна р. Сухоны отклонения фактических и сценарных условных обеспеченностей достигают максимальных значений — 18 %. Водосборы, находящиеся на юге ЕЧР, изменения климата в соответствии с рассматриваемым климатическим сценарием «не почувствуют»: отклонения варьируют около нуля. Для водосборов Северо-Западного региона отмечается наименьшая разница

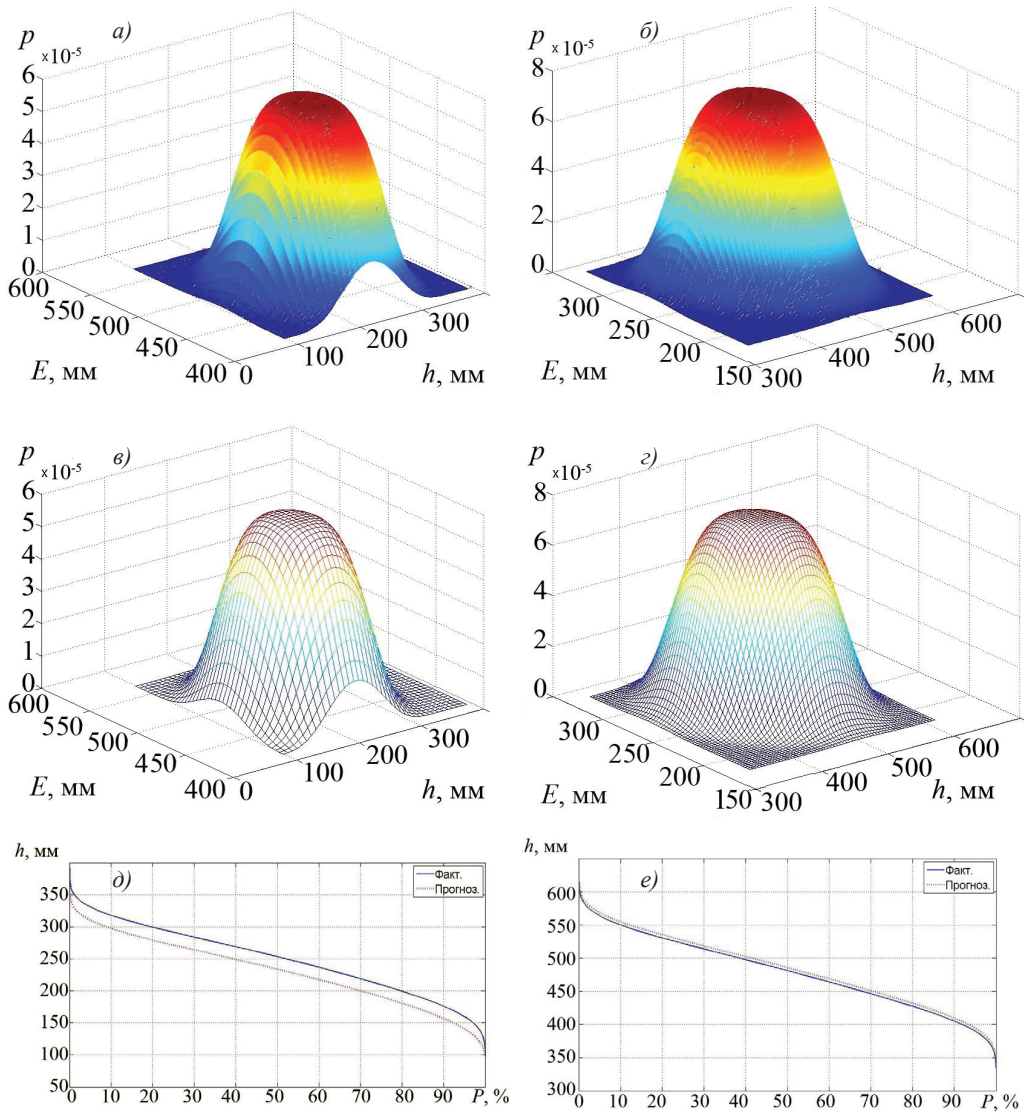


Рис. 4. Фактические (а, б) и сценарные (в, г) теоретические поверхности плотности вероятности и условные кривые обеспеченности (д, е) для р. Луги, г. Кингисепп (слева) и р. Печоры, с. Троицко-Печорск (справа).

сценарных и фактических значений обеспеченных характеристик речного стока. В среднем спрогнозированы следующие отклонения: для 0,1 %-ной обеспеченности отклонение составляет  $-1,0 \%$ , для 1 %-ной обеспеченности  $-2,2 \%$  и для 10 %-ной обеспеченности  $-3,7 \%$  (статистически значимых отклонений нет; исключение составляет водосбор р. Сухоны).

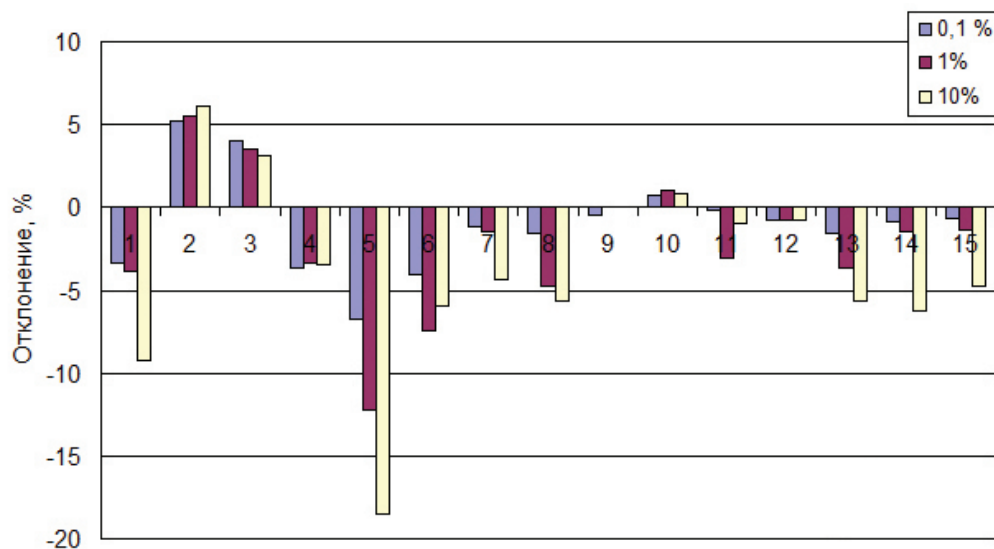


Рис. 5. Гистограммы относительных отклонений условных фактических ( $\Phi$ ) и прогнозных ( $\Pi$ ) значений обеспеченности:  $((\Phi - \Pi) / \Phi) \cdot 100 \%$ , представленные для пятнадцати станций (1—15).

### Выводы

В настоящей работе предложен метод учета испарения при статистической обработке рядов речного стока, основанный на вычислении и построении поверхности плотности вероятности и получении условных, т. е. с учетом средних многолетних значений испарения, обеспеченных значений характеристик речного стока. Апробация метода проведена на речных бассейнах европейской части России.

Теоретическое представление двумерной плотности вероятности позволит оптимизировать процесс нахождения условных обеспеченных значений расходов воды, необходимых для надежного моделирования процесса формирования речного стока.

Также предложен способ учета испарения при долгосрочной оценке статистических характеристик речного стока, основанный на совместном решении системы алгебраических прогнозных уравнений для начальных моментов стока и испарения.

*Работа финансировалась грантом Министерства образования и науки РФ в рамках государственного контракта № 5.6293.2017/8.9.*

### Список литературы

1. Гайдукова Е.В., Диавара Х. Долгосрочная оценка вероятностных распределений многолетнего годового испарения при изменении климата на примере Африканского континента. Учебное пособие. СПб: изд-во РГГМУ, 2016. 114 с.



2. Коваленко В.В. Обеспечение устойчивости моделирования и прогнозирования речного стока методами частично инфинитной гидрологии. СПб: изд-во РГГМУ, 2011. 107 с.
3. Коваленко В.В. Частично инфинитная гидрология. СПб: изд-во РГГМУ, 2007. 230 с.
4. Коваленко В.В., Викторова Н.В., Гайдукова Е.В., Громова М.Н., Хаустов В.А., Шевнина Е.В. Методические рекомендации по оценке обеспеченных расходов проектируемых гидротехнических сооружений при неустановившемся климате. СПб: изд-во РГГМУ, 2010. 51 с.
5. Коваленко В.В., Гайдукова Е.В., Соловьев Ф.Л., Бонгу С.Э., Джалалов А. О возможности учета испарения при моделировании процесса формирования многолетнего речного стока (на примере Западной Африки) // Ученые записки РГГМУ. 2016. № 44. С. 45—53.
6. Коваленко В.В., Гайдукова Е.В., Соловьев Ф.Л., Чистяков Д.В. Частично инфинитное расширение фазового пространства модели формирования многолетнего речного стока для статистически устойчивого прогнозирования катастроф // Естественные и технические науки, 2009. № 2. С. 193—199.
7. Сикан А.В. Методы статистической обработки гидрометеорологической информации. СПб: изд-во РГГМУ, 2007. 279 с.
8. Константинов А.П. Испарение в природе. Л.: Гидрометеиздат, 1968. 532 с.
9. Ghahreman N., Tabatabaei M., Babaeian I. Investigation of uncertainty in the IPCC AR5 precipitation and temperature projections under RCP scenarios [Электронный ресурс] // Conference: Common Future Under Climate Change International Scientific Conference. Paris, France, 2015. DOI: 10.13140/RG.2.1.1808.3683.
10. IPCC / Data Distribution Centre [Электронный ресурс]. Режим доступа: [http://www.ipcc-data.org/sim/gcm\\_monthly/AR5/Reference-Archive.html](http://www.ipcc-data.org/sim/gcm_monthly/AR5/Reference-Archive.html), 2017. Дата обращения: 21.11.17.
11. IPCC [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.ipcc.ch> — IPCC Secretariat World Meteorological Organization, 2018. Дата обращения: 21.03.17.
12. Miao C., Duan Q., Huang Y. Оценка климатических моделей CMIP5 и прогнозируемые изменения температуры на территории Северной Евразии [Электронный ресурс]. IOP Publishing, 2014. Режим доступа: <http://iopscience.iop.org/>. Дата обращения 24.03.2016.