

ТРАНСПОРТИРУЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ РЕЧНОГО ПОТОКА

М.В. Шмакова, С.А. Кондратьев

Институт озераведения РАН, m-shmakova@yandex.ru

Рассмотрены основные закономерности сопряжения гидравлических переменных состояния речного потока. Сформулировано понятие фазового гидравлического пространства, проиллюстрированное примерами. Получена новая формула транспортирующей способности потока и проведен сравнительный анализ результатов вычислений по некоторым формулам транспортирующей способности потока на данных наблюдений за твердым стоком на североамериканских реках.

Ключевые слова: транспортирующая способность потока, расход наносов, расход воды, речной поток, фазовое гидравлическое пространство.

TRANSPORTING CAPACITY OF RIVER FLOW

M.V. Shmakova, S.A. Kondratyev

Institute of Limnology

The paper deals with the basic rules of coupling of hydraulic variables of the river flow. The concept of phase hydraulic space is formulated and illustrated by examples. A new formula for the transport capacity of the river flow was obtained and a comparative analysis of the results of calculations using several formulas of the transport capacity of the flow was carried out. The calculations use the results of observations of solid flow in the North American rivers

Keywords: transport capacity of river flow, sediment flow, water flow, river flow, phase hydraulic space.

Введение

Транспортирующая способность потока — это максимальный расход наносов, который может перенести поток при фиксированном расходе воды. Транспортирующая способность потока определяет процесс переотложения наносов в русле — основной фактор русловых процессов. При расходе наносов меньшем, чем транспортирующая способность потока, происходит вовлечение в движение донных отложений, размыв дна. При расходе наносов, начинающем превышать транспортирующую способность потока, происходит оседание движущихся наносов, увеличение отметок дна. Если фактический расход наносов в речном потоке соответствует его транспортирующей способности, то между процессами взвешивания и осаждения наносов наблюдается динамическое равновесие.

Учет соответствия между стоком наносов и характером русловых процессов определяет точность и надежность прогнозов русловых деформаций. Это позволит предвидеть возможные изменения морфодинамических типов русел, параметров их живых сечений и скорости размыва берегов и дна [7].

Известно, что для оценки расхода взвешенных и влекомых наносов существует достаточно много формул. Все эти формулы представляют собой зависимости количества перемещаемого вещества от переменных состояния потока. Часто эти формулы получены для отдельных водотоков или обобщены для рек одного типа. Кроме того, наличие в формулах эмпирических коэффициентов, физический смысл которых нередко неясен, сужает область применения этих формул. Однако именно оптимизация значений эмпирических коэффициентов позволяет минимизировать отклонение между результатами вычислений по расчетной формуле и данными наблюдений для отдельного расчетного створа.

При выводе же формулы транспортирующей способности потока сложно ориентироваться на данные наблюдений на конкретной реке, так как не на всех водотоках и не для всех периодов водности достигается предельное насыщение потока наносами.

Одним из определяющих факторов вовлечения частицы наносов в поток является режим турбулентности речного потока: пульсации скорости оказывают на частицы взвешивающее и поддерживающее их в потоке действие. Однако известно, что наличие в потоке твердого вещества значительно уменьшает пульсации скорости, течение становится относительно упорядоченным. В то же время осветленный поток, располагая большой размывающей способностью русла, при прочих равных условиях имеет более турбулентный режим движения.

Исходя из вышеизложенного можно сделать вывод о том, что степень насыщения потока наносами имеет нелинейную зависимость от средней скорости потока и зависит, помимо прочего, от режима движения потока.

Таким образом, при выводе формулы транспортирующей способности потока должны приниматься во внимание не только зависимость количества перемещаемого вещества от переменных состояния потока, но и факторы, определяющие предельное насыщение жидкости взвесями. К этим факторам можно отнести взвешивающую способность потока, критерии Фруда и Рейнольдса, а также наличие в потоке мелких фракций. Известно, что высокое содержание мельчайших частиц увеличивает вязкость воды и вследствие этого влияет на способность потока к транспорту более крупных фракций. Таким образом, предел насыщения потока наносами зависит как от гидравлики потока, так и от состава транспортируемых наносов [4].

Наибольшее внимание к выводу формул транспортирующей способности потока (или формулы расчета незаилающей скорости) пришлось на время интенсивной разработки систем деривационных каналов в период первой половины прошлого века. При этом основная часть таких формул была основана на данных полевых наблюдений или экспериментов на лотках. В это время в СССР были проведены обширные исследования взвесенесущего режима оросительных каналов и насыщенных наносами рек. Результаты этих исследований легли в основу посторения расчетных схем, рекомендованных соответствующими нормативами.

Целью настоящей работы является анализ основных закономерностей сопряжения гидравлических переменных состояния двухфазного речного потока и

вывод и апробация нового расчетного выражения для оценки транспортирующей способности потока.

Формулы для оценки транспортирующей способности потока

Приведем несколько формул для количественной оценки транспортирующей способности потока G_{\max} (кг/с) по общему расходу наносов, по которым в дальнейшем будут проводиться расчеты.

Формула Е.А. Замарина для гидравлический крупности $0,002 \text{ м/с} < \omega < 0,008 \text{ м/с}$ получена на основании данных полевых наблюдений на земляных каналах [3]:

$$G_{\max} = Q \cdot 0,022 \left[\frac{v}{\omega} \right]^2 \sqrt{hI}, \quad (1)$$

где Q — расход воды ($\text{м}^3/\text{с}$); v — средняя скорость потока (м/с); ω — гидравлическая крупность частиц (м/с); h — средняя глубина потока (м); I — уклон.

Формула В.Н. Гончарова [2], рекомендуемая в СО 34.21.204-2005 [6] для расчета транспортирующей способности потока при условии $u^*/\omega < 2,5$, имеет вид

$$G_{\max} = \rho_{\text{гр}} Q \frac{1 + \varphi}{800} \frac{d}{h} \frac{v_{\text{н}}}{v} \left(\frac{v^3}{v_{\text{н}}^3} - 1 \right) \left(\frac{v}{v_{\text{н}}} - 1 \right), \quad (2)$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{\rho_{\text{гр}} - \rho_{\text{в}}}{0,9\rho_{\text{в}}} \frac{gd}{\omega^2}},$$

$$v_{\text{н}} = 0,96 \sqrt{gd^{0,4} (d + 0,0014)^{0,6} \left(\frac{h}{d} \right)^{0,2}},$$

где u^* — динамическая скорость потока (м/с); $\rho_{\text{гр}}$ и $\rho_{\text{в}}$ — плотность грунта и воды соответственно (кг/м^3); d — средний диаметр частиц (м); $v_{\text{н}}$ — неразмывающая скорость потока (м/с).

Область применения формулы В.Н. Гончарова обоснована опытами при условиях: $10 \leq h/d \leq 1550$ ($8,7 \leq h/d_{95} \leq 500$); $1 \leq v/v_{\text{н}} \leq 1,8$.

Формула Р.А. Бэгнольда [10], построенная на выражении для работы, которую совершает речной поток, транспортируя взвешенные и влекомые наносы, имеет вид

$$G_{\max} = Q \rho_{\text{гр}} \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{гр}} - \rho_{\text{в}}} \frac{C_f v^2}{gh} \left(\frac{0,13}{f - I} + \frac{0,01}{\omega/v - I} \right), \quad (3)$$

$$C_f = \left(\frac{k}{\ln(12h/\Delta)} \right)^2,$$

$$\Delta = \begin{cases} 3d_{90} & \text{при } \frac{\rho_B}{\rho_{гр} - \rho_B} \frac{u^{*2}}{gh} < 1, \\ 3 \frac{\rho_B}{\rho_{гр} - \rho_B} \frac{u^{*2}}{gh} d_{90} & \text{при } \frac{\rho_B}{\rho_{гр} - \rho_B} \frac{u^{*2}}{gh} \geq 1, \end{cases}$$

где f — коэффициент внутреннего трения; I — уклон русла; k — постоянная Кармана, равная 0,41; Δ — эффективная высота выступов шероховатости; d_{90} и d_{95} — диаметр частиц 90 и 95 %-ной обеспеченности соответственно (мм).

Формула (3) описывает сумму транспортирующей способности потока для взвешенных и донных наносов.

В приведенных выше формулах динамическая скорость u^* (м/с) рассчитывается как отношение касательного напряжения τ (кг/(м·с²)) на границе к плотности воды:

$$u^* = \sqrt{\tau / \rho_B}.$$

Касательные напряжения на дне в соответствии с квадратичным законом сопротивления записываются в виде

$$\begin{aligned} \tau &= -\lambda |v| v, \\ \lambda &= gn^2 h^{-1/3}, \end{aligned}$$

где λ — гидравлическое сопротивление на дне реки, n — коэффициент шероховатости русла.

Вывод формулы транспортирующей способности потока

Очевидно, что один и тот же расход воды способен перенести количество наносов $G = [0; G_{\max}]$, где G_{\max} — максимально возможное количество наносов, переносимое данным расходом воды за единицу времени, или транспортирующая способность потока. При $G = 0$ поток будет осветленным и его скорость будет минимальной, а глубина возрастет. При $G = G_{\max}$ скорость потока возрастет, а глубина уменьшится [11]. При этом каждому крайнему случаю соответствует один и тот же расход воды ($Q = \text{const}$). Очевидно, что заданный расход воды при постоянной ширине потока может быть получен различными сочетаниями глубины и скорости.

Отложив по одной оси скорость, а по другой глубину потока и нанеся на этот график точки, соответствующие одному значению расхода воды $h_i v_i = Q/B = \text{const}$ при ширине потока $B = \text{const}$, получим функцию, представляющую **фазовое гидравлическое пространство потока** (пространство состояний системы). Каждому сочетанию глубины и скорости ($h_i v_i = Q/B = \text{const}$) будет соответствовать расход наносов G_i . Значение расхода наносов для каждого сочетания определяется транспортирующим потенциалом потока. Таким образом, транспортирующий

потенциал потока представляет собой массу твердого вещества, переносимого за единицу времени через поперечное сечение потока при постоянном расходе воды, определяющую соотношение скорости и глубины потока. Транспортирующий потенциал потока меньше транспортирующей способности потока или равен ей (при постоянном расходе воды).

Крайние точки полученной функции определяются физикой процесса, и им соответствует состояние осветленного потока (h_{\max}, v_{\min}) с одной стороны и транспортирующей способности потока (h_{\min}, v_{\max}) с другой стороны.

Очевидно, что область осветленного потока будет характеризоваться максимальной неразмывающей скоростью, тогда как область максимальной взвесенесущей нагрузки на поток — минимальной заиляющей скоростью.

Фазовое гидравлическое пространство характеризуется морфометрией русла и характером подстилающей поверхности, а транспортирующий потенциал потока определяется в соответствии с количеством поступившего в поток твердого вещества. Вид функции, аппроксимирующей фазовое гидравлическое пространство, определяется формой поперечного сечения, а сама функция представляет собой соотношение скорости и глубины для постоянного расхода воды в расчетном створе. На рис. 1 приведен пример фазового гидравлического пространства для русла прямоугольной формы.

За основу при выводе формулы транспортирующей способности потока приемем аналитическую формулу общего расхода наносов [8]

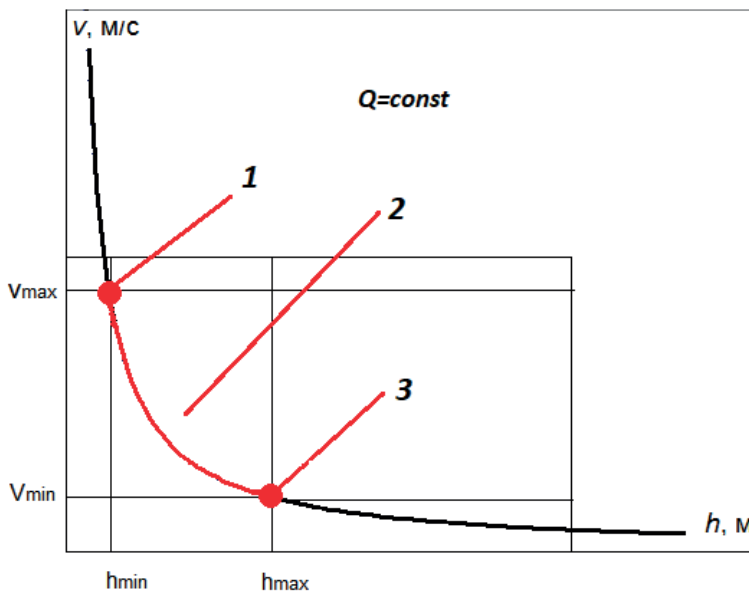


Рис. 1. Фазовое гидравлическое пространство потока в расчетном створе при $Q = \text{const}$.

1 — область максимальной взвесенесущей нагрузки на поток,
2 — область физически возможных значений, 3 — область осветленного потока.

$$G = \frac{\rho_{\text{гр}}}{\rho_{\text{гр}} - \rho_{\text{в}}} Q \left[\frac{c}{hg} - (1-f)\rho_{\text{в}} I \right], \quad (4)$$

где c — сцепление частиц грунта при сдвиге (кг/(м·с²)).

Формула (4) является следствием основного уравнения движения воды и твердого вещества, которое построено на основании сил, действующих в системе водный поток — донные отложения — наносы [8].

Расход наносов G и глубина в формуле (4) взаимосвязаны между собой, то есть потоку при фиксированном расходе воды и уклоне соответствует именно та глубина, которая определяется текущей взвесенесущей нагрузкой потока. Таким образом, при увеличении расхода наносов скорость потока повысится, а глубина уменьшится. Это подтверждается и данными экспериментов, приведенными в [11].

Изложенное выше дает основание полагать транспортирующую способность потока G_{max} равной расходу наносов при максимальном значении скорости потока (и минимальной глубине) для заданного расхода воды:

$$G_{\text{max}} = \frac{\rho_{\text{гр}}}{\rho_{\text{гр}} - \rho_{\text{в}}} Q \left[\frac{c}{h_{\text{min}} g} - (1-f)\rho_{\text{в}} I \right], \quad (5)$$

где h_{min} — минимально возможная глубина при фиксированных расходе воды, уклоне и крупности донных отложений (м).

Минимально возможная глубина обусловлена морфометрией русла и расходом воды. Уменьшение h_{min} уже практически невозможно, так как в пределах значения этой глубины будет происходить интенсивное оседание взвешенного вещества на дно.

Таким образом, расчет транспортирующей способности потока предваряет оценка величин h_{min} или v_{max} .

Для оценки граничной, так называемой заиляющей скорости v_{max} , при которой либо смесь в потоке осаждается, либо меняется качественное состояние потока — поток становится вязким, можно использовать, например, выражение [5]

$$v_{\text{max}}^2 = \frac{\rho_{\text{гр}}}{\rho_{\text{гр}} - \rho_{\text{в}}} \frac{1}{2} gh. \quad (6)$$

Согласно формуле (6) минимальная глубина потока будет равна

$$h_{\text{min}} = \sqrt[3]{2 \frac{\rho_{\text{гр}} - \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{гр}}} \frac{Q^2}{B^2 g}}. \quad (7)$$

Тогда выражение для транспортирующей способности потока (5) с учетом формулы (7) примет вид

$$G_{\text{max}} = \frac{\rho_{\text{гр}}}{\rho_{\text{гр}} - \rho_{\text{в}}} Q \left[\frac{c}{g \sqrt[3]{2 \frac{\rho_{\text{гр}} - \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{гр}}} \frac{Q^2}{B^2 g}}} - (1-f)\rho_{\text{в}} I \right]. \quad (8)$$

Таким образом, полученная аналитическая формула транспортирующей способности потока (8) основана на балансе сил, действующих в системе водный поток — донные отложения — наносы [8], формуле сопротивления грунта сдвигу [1] и формуле граничной скорости осаждения частиц в потоке воды [5].

Следует заметить, что полученная формула (8) имеет некоторые ограничения для расчетов. При значении параметра $c = 0$ (как и получалось при оптимизации параметров формулы для некоторых водотоков) определяющей переменной состояния расхода наносов является расход воды.

Объекты моделирования

Для расчетов по формулам транспортирующей способности потока использовались данные наблюдений на 15 гидрометрических створах, расположенных на американских реках штатов Аляска, Айдахо, Колорадо, Вашингтон и Висконсин. Наблюдения на этих водотоках проводились в 70—80-х годах прошлого столетия, и результаты исследований приводятся в отчете «Measured total sediment loads (suspended loads and bedloads) for 93 United States streams», опубликованном геологической службой министерства внутренних дел США [12] и находящемся в свободном доступе.

В отчете представлены данные о взвешенных и влекомых наносах, измеряемых почти одновременно. Кроме того, в отчете приводятся гидравлические переменные состояния и гранулометрический анализ донных отложений и наносов. Диапазон основных гидравлических характеристик рек, в пределах которых проводились расчеты, приведен в работе [9].

Примеры фазового гидравлического пространства

На примере некоторых североамериканских рек, имеющих прямоугольную форму поперечного сечения расчетного створа, проиллюстрируем фазовое гидравлическое пространство. Прямоугольная форма поперечного сечения подтверждается линейным характером связи $Q = f(h)$.

На рис. 2 а приведены графики связи средней глубины потока и расхода воды. Красными линиями обозначены области с одинаковыми расходами воды и соответствующими этим расходам разными значениями глубины. В пределах каждой области расходы воды различаются не более чем на 3 %, что значительно выше точности измерения этой величины. Это дает основание полагать значение расхода воды в пределах выделенной области постоянным и рассматривать среднюю глубину (и скорость течения) потока в виде переменных относительно этого расхода воды.

На рис. 2 в представлено поле точек, соответствующее участкам, выделенным на рис. 2 а, с подписанными значениями общего расхода наносов (кг/с). В основном (в 80 % случаев), для всех рассматриваемых областей малым значениям глубины в пределах одного и того же расхода воды соответствует большее значение общего расхода наносов. Это является подтверждением представленной выше теории фазового гидравлического пространства.

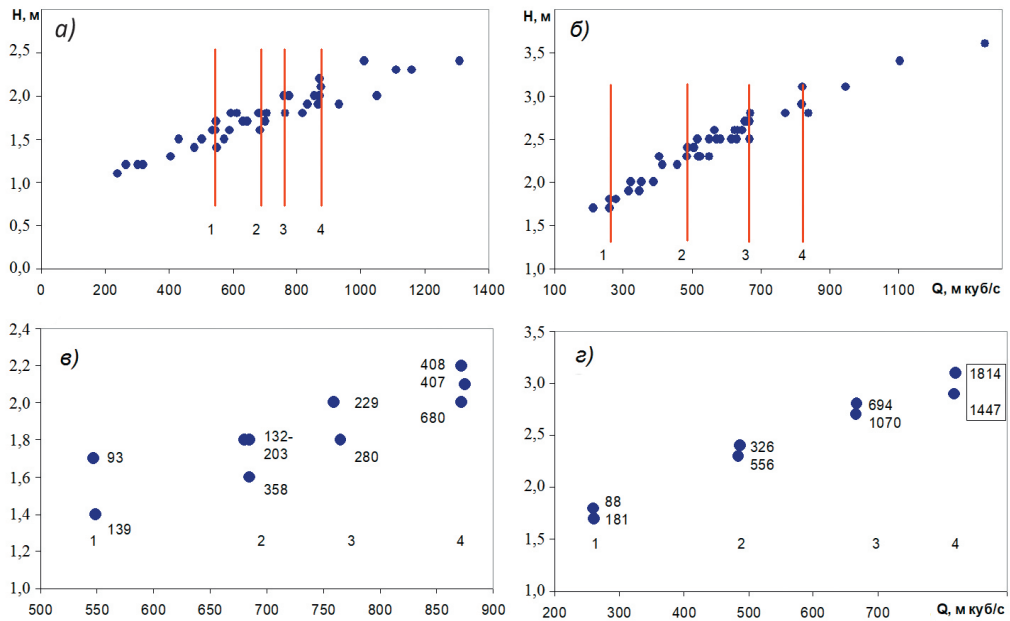


Рис. 2. Связь средней глубины потока и расхода воды (а и б) и поле точек (цифры — значения общего расхода наносов (кг/с)), соответствующее выделенным выше участкам (в и г).

а и в — Susitna River, б и г — Chulitua River.

Расчеты. Качественная оценка

В основу дальнейших расчетов положены формулы транспортирующей способности потока (1) — (3) и (8). Основным критерием качества вычислений будет служить условие того, что наблюдаемые значения общего расхода наносов не будут превышать рассчитанные значения этой величины. Такая, несколько условная и, скорее, качественная оценка корректности работы формул объясняется тем, что для расчетных водотоков отсутствует информация о достижении взвешенной нагрузки потока максимально возможных значений. Иными словами, нет ясности, соответствует ли измеренный расход наносов $G_{\text{наб}}$ транспортирующей способности потока G_{max} . Подобный качественный анализ допустим и, например, в СО 34.21.204-2005: «в этом случае верхняя огибающая характеризует транспортирующую способность потока» [6].

Эта качественная оценка дополняется еще одним требованием: рассчитанные значения должны в разумных пределах отклоняться от измеренных, то есть рассчитанные максимальные значения расхода наносов $G_{\text{max рас}}$ должны соответствовать гидравлическим условиям водотока.

В общем виде изложенные условия соответствия можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} G_{\text{наб}} \leq G_{\text{max рас}} \leq k \cdot G_{\text{наб}}, \\ k \in \left[1, \frac{G_{\text{max}}}{G_{\text{наб}}} \right], \end{cases} \quad (9)$$

где k — безразмерный коэффициент, определяющий степень наполненности русла перемещаемыми наносами (по результатам наблюдений).

Для формулы (8) параметры трения приняты равными тем параметрам, которые были оптимизированы для периода большой и средней водности в расчетах по аналитической формуле расхода наносов [9]. Ввиду того что для некоторых водотоков в результате подбора параметр $c = 0$, в расчетах были задействованы данные измерений только для половины расчетных водотоков.

Для формулы Бэгнольда коэффициент внутреннего трения подбирался так, чтобы условия соответствия (9) соблюдались самым оптимальным образом.

Выполнение условий применимости формулы Гончарова имело место лишь для семи из пятнадцати водотоков, а для формулы Замарина — для тринадцати водотоков.

В табл. 1 приведены значения относительного числа случаев непревышения δ (%) наблюдаемых значений расходов наносов рассчитанными, средние относительные отклонения $\sigma_{\text{общ}}$, % (между рассчитанными значениями транспортирующей способности потока и наблюдаемого общего расхода наносов) и σ_{min} , % (только между рассчитанными значениями транспортирующей способности потока, не превышающими наблюдаемые, и наблюдаемого общего расхода наносов). Последний показатель отражает степень отклонения в сторону явно ошибочного расчета, поскольку расчет G_{max} предполагает выполнение условия (9). Средние относительные отклонения вычислялись по формуле

$$\sigma = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|G_{\text{рас}} - G_{\text{изм}}|}{\min(G_{\text{изм}}; G_{\text{рас}})} \cdot 100\%.$$

Таблица 1

Результаты расчетов по формулам транспортирующей способности потока

Формула	δ , %	$\sigma_{\text{общ}}$, %	σ_{min} , %
Замарина	45	555	671
Гончарова	38	819	882
Бэгнольда	24	849	434
(8)	33	87	66

Выбор минимального из рассчитанного и наблюдаемого значений расхода наносов в знаменателе дает возможность уйти от занижения среднего относительного отклонения в случае, когда рассчитанное значение близко к нулю. В этом случае среднее относительное отклонение, рассчитанное традиционным способом, стремится к 100 %, что занижает ошибку расчета.

На рис. 3 наглядно представлены результаты вычислений по четырем расчетным формулам. Степень качественного соответствия рассчитанных значений

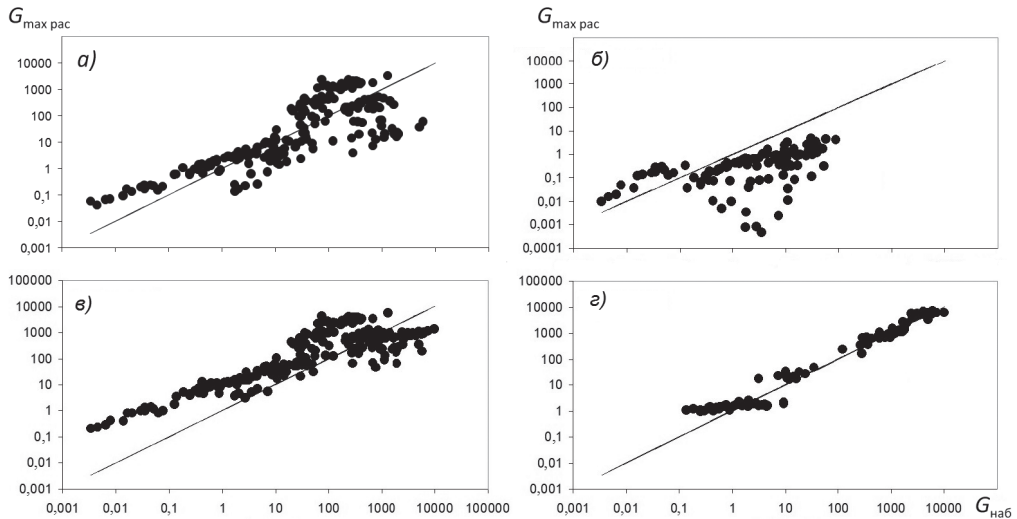


Рис. 3. Результаты вычислений
 транспортирующей способности потока по разным формулам.

а — формула Замарина, *б* — формула Гончарова, *в* — формула Бэгнольда, *г* — формула (8).

общего расхода наносов наблюдаемым значениям демонстрирует превышение рассчитанных точек над линиями биссектрис.

Результаты расчетов, приведенные выше, проиллюстрировали в обобщенном виде то, что в основном (55—76 %) рассчитанные значения расходов наносов превышают наблюдаемые значения. Однако наиболее соответствуют порядку величин наблюдаемых расходов наносов значения, рассчитанные по формуле (8): отклонение $\sigma_{\text{общ}}$ составило 87 %. Для этой же формулы получены и наиболее адекватное значение показателя σ_{min} , равное 66 %.

Количественная оценка

В основу расчетов для проведения количественной оценки качества расчетных формул легло сопоставление рассчитанных по приведенным выше формулам и наблюдаемых значений транспортирующей способности потока. Для расчетных водотоков при наблюдаемой средней глубине потока по формуле (6) были рассчитаны минимальные значения незаиляющей скорости потока v_{max} . Эти значения были сопоставлены с наблюдаемыми значениями скорости v , которым соответствует средняя глубина. При примерном равенстве скоростей v и v_{max} можно предполагать, что измеренный расход наносов соответствует транспортирующей способности потока $G_{\text{max набл}}$. Выявленные значения $G_{\text{max набл}}$ сравнивались со значениями G_{max} , рассчитанными по формулам транспортирующей способности потока, приведенным выше.

В табл. 2 приведены данные для расчета и результаты вычислений для створа Fork Toutle River near Kid Valley. Для этого створа, единственного из всех расчетных створов, значения v и v_{\max} показали достаточную близость. Расхождение между этими величинами находится в пределах 1—15 %. Вычисления G_{\max} проводились по всем приведенным в работе формулам за исключением формулы Гончарова ввиду несоблюдения условий применимости этой формулы для расчетного водотока.

Как видно из табл. 2, наилучшее соответствие наблюдаемых и рассчитанных значений транспортирующей способности потока показала формула (8). Среднее относительно отклонение для этой формулы составило 29 %. Для формул Замарина и Бэгнольда рассчитанные значения G_{\max} оказались существенно ниже наблюдаемых.

Таблица 2

Данные для расчета и результаты вычислений транспортирующей способности потока для створа Fork Toutle River near Kid Valley

Q , м ³ /с	v_{\max} , м/с	v , м/с	B , м	h , м	$G_{\max \text{ набл}}$, кг/с	G_{\max} , кг/с		
						Замарин	Бэгнольд	(8)
185	2,9	2,8	56	1,1	5090	38,99	352	3367
110	2,6	2,4	56	0,9	1883	16,42	181	1953
123	2,6	2,6	56	0,85	2045	21,18	269	2417
147	2,6	2,4	59	0,85	1714	21,32	260	2607
153	2,8	2,4	59	0,98	1978	22,16	225	2348

Выводы

Многие формулы для расчета транспортирующей способности потока и минимальной незаилающей скорости были получены опытным путем для каналов в условиях максимальной загроуженности потока наносами. Для естественных же водотоков выбор формулы для расчета транспортирующей способности потока и оптимизация параметров формулы крайне затруднены из-за отсутствия данных достоверных наблюдений за предельно возможным расходом наносов в потоке. Ввиду этого расчеты, приведенные в данной работе, носят несколько условный характер. Тем не менее полученные результаты как раз и демонстрируют незаконченность теоретических исследований в изучении транспортирующей способности естественных водотоков.

Понятие фазового гидравлического пространства, предложенное в работе, наглядно иллюстрирует соотношение основных переменных состояния потока — глубины, скорости потока и расхода наносов, что подтверждается данными наблюдений на расчетных водотоках.

Список литературы

1. Бабков В.Ф., Быковский Н.И., Гербурт-Гейбович А.В., Тулаев А.Я. Грунтоведение и механика грунтов. М.: Дориздат, 1950. 334 с.

2. *Гончаров В.Н.* Динамика русловых потоков. Л.: Гидрометеиздат. 1962. 366 с.
3. *Замарин Е.А.* Транспортирующая способность и допускаемые скорости течения в каналах. М.-Л.: Гострансиздат, 1951. 82 с.
4. *Караушев А.В.* Проблемы динамики естественных потоков. Л.: Гидрометеиздат, 1960. 393 с.
5. *Ламаев Б.Ф.* Гидроструйные насосы и установки. Л.: Машиностроение, 1988. 256 с.
6. СО 34.21.204-2005 «Рекомендации по прогнозу трансформации русла в нижних бьефах гидроузлов». СПб: изд-во ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева, 2006. 104 с.
7. *Чалов Р.С.* Сток наносов, транспортирующая способность потоков и их роль в формировании речных русел // География и природные ресурсы. 2011. № 3. С. 20—27.
8. *Шмакова М.В.* Расчеты твердого стока рек и заиления водохранилищ. СПб: изд-во ВВМ, 2018. 149 с.
9. *Шмакова М.В., Кондратьев С.А.* Анализ и расчеты твердого стока (на примере североамериканских рек) // Ученые записки РГГМУ. 2016. № 43. С. 51—66.
10. *Paul J. Visser.* Application of sediment transport Formulae to sand-dike breach Erosion // Communications on Hydraulic and Geotechnical Engineering. Report № 94-3. Faculty of Civil Engineering. Delft University of Technology, 1995.
11. *Vanoni V.A.* Sediment transportation mechanics: suspension of sediment // J. Hydr. Div. Proc. Am. Soc. Civ. Engrs. 1963. 89.
12. <http://pubs.usgs.gov/of/1989/0067/report.pdf>