

Составила:

Беликова Г.И. – старший преподаватель кафедры высшей математики и теоретической механики РГГМУ

© Г.И. Беликова, 2019.

© РГГМУ, 2019

1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Вычислительная математика» является формирование у студентов широты взглядов на математику и её применение, а также формирование понимания важности математического моделирования различных информационных процессов. В результате активного освоения данного курса студент должен приобрести привычку логически рассуждать, чётко формулировать свои мысли, понимать разные стороны использования математики – логическую, прикладную и философскую. Кроме этого студенты должны хорошо знать и использовать фундаментальные понятия и их взаимосвязь в тех разделах математики, которые входят в данную дисциплину. Важно, чтобы студент, освоив эту дисциплину, хорошо понял следующее:

– многие абстрактные математические понятия, как показал многовековой человеческий опыт, стали полезным инструментом для познания различных природных и социальных явлений;

– для использования математики в познании явлений окружающего мира необходимы общность и строгость;

2. Место дисциплины в структуре ОПОП

Учебная дисциплина «Вычислительная математика» реализуется в рамках вариативной части цикла программы подготовки бакалавра.

Дисциплина является обязательной для изучения студентами.

Учебная дисциплина «Вычислительная математика» базируется на учебных дисциплинах, приведённых в таб. 1.

Таблица 1

Обеспечивающие учебные дисциплины	Входные требования		
	знать	уметь	владеть
Математический анализ функции одного аргумента, высшая алгебра и аналитическая геометрия в объёме 3х семестров	Свойства элементарных функций, теорию пределов, дифференциальное и интегральное исчисление одного аргумента и нескольких переменных, векторную алгебру, аналитическую геометрию на плоскости, теорию определителей, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения математической физики	Вычислять пределы, дифференцировать и интегрировать, приводить к каноническому виду уравнения первого и второго порядков	Разложением дифференцируемой функции в многочлен Тейлора, классификацией и оценкой бесконечно малых

Учебная дисциплина «Вычислительная математика» для направления подготовки «Гидрометеорология» является базой для освоения математического моделирования гидрометеорологических процессов.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

Код	Компетенция
-----	-------------

компетенции	
ОПК-1	владение базовыми знаниями в области фундаментальных разделов математики в объеме, необходимом для владения математическим аппаратом в гидрометеорологии, для обработки и анализа данных, прогнозирования гидрометеорологических характеристик
ПК-1	владением методами гидрометеорологических измерений, статистической обработки и анализа гидрометеорологических наблюдений с применением программных средств

В результате освоения компетенций в рамках дисциплины «Вычислительная математика» обучающийся должен:

Знать:

- основные положения соответствующих разделов математики;
- основные теоремы соответствующих разделов математики и рамки их применения;
- свойства изучаемых математических объектов;
- круг задач, решение которых привело к созданию соответствующего раздела математики;
- область применения каждого изученного раздела численных методов.

Уметь:

- решать базовые математические задачи в рамках изученных разделов математики;
- логически стройно и аргументировано излагать (письменно и устно) идею решения математической задачи;
- выстраивать алгоритм решения поставленной задачи;
- знать и использовать пакеты математических программ для решения базовых задач в рамках изученных разделов математики.

Владеть:

- основными методами решения базовых задач в рамках изученных разделов математики.

Основные признаки освоения формируемых компетенций в результате освоения дисциплины «Вычислительная математика» сведены в таблице.

Этап (уровень) освоения компетенции	Основные признаки проявления компетенции (дескрипторное описание уровня)				
	1.	2.	3.	4.	5.
Уровень 1 (минимальный)	не владеет	слабо ориентируется в определениях и понятиях	способен понять основной смысл в тексте	владеет основными навыками работы с учебной литературой и конспектами лекций	способен дать собственную критическую оценку изучаемого материала
	не умеет	не выделяет основные свойства	способен объяснить основную идею	понимает смысл поставленной задачи и может связать её решение с соответствующей теорией	может соотнести теоретический материал с поставленной задачей
	не знает	допускает грубые ошибки	знает основные положения и свойства, но не умеет обобщать	понимает смысл основных положений, свойств и теорем	способен найти идею решения поставленной задачи
Уровень 2 (базовый)	не владеет	плохо ориентируется в математических понятиях	владеет методами решения, но не способен свободно изложить материал	свободно излагает материал, но не может сопоставлять и оценивать различные способы решения	способен понять к какому разделу математики относится поставленная задача
	не умеет	знает свойства, но плохо их применяет	выделяет только поверхностный смысл понятия, свойства или теоремы	хорошо знает теорию, но испытывает сложности в её применении	способен найти соответствующий теоретический материал для решения поставленной задачи
	не знает	допускает много ошибок	может изложить основные положения, теоремы и свойства		способен построить алгоритм решения поставленной задачи
Уровень 3 (продвинутый)	не владеет	ориентируется в основных понятиях	в общих чертах понимает основную идею решения, но плохо связывает с соответствующим методом её решения	понимает смысл поставленной задачи и владеет подходом к её решению	способен грамотно сформулировать и, если надо, доказать свойства, которым обладает заданный математический объект
	не умеет	выделяет основные свойства, но не может их применять	может понять алгоритм решения, но затрудняется его применить	понимает смысл теории, её практическую ценность, но испытывает затруднения в её применении	свободно ориентируется в заданной области математики, понимает основные идеи и их практическую ценность
	не знает	допускает ошибки в преобразованиях	способен изложить основное содержание или идею решения	знает основное содержание и способен его анализировать	может анализировать различные методы для решения поставленной задачи

4. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных единиц, 72 часа.

Объем дисциплины	Всего часов
	Очная форма обучения
	2019 г. набора
Общая трудоемкость дисциплины	72
Контактная работа обучающихся с преподавателям (по видам аудиторных учебных занятий) – всего:	28
в том числе:	
лекции	14
практические занятия	14
семинарские занятия	-
Самостоятельная работа (СРС) – всего:	44
в том числе:	
подготовка к экзамену	-
подготовка контр. и самостоятельным работам.	-
Вид промежуточной аттестации:	зачет

4.1. Содержание разделов дисциплины

Очная форма обучения 2019 г. набора

Раздел и тема дисциплины	Семестр	Виды учебной работы, в т.ч. самостоятельная работа студентов, час.			Формы текущего контроля успеваемости в час.	Формируемые компетенции
		Лек.	Практ.	Сам. Раб.		
2	4	4	5	6	7	8
Раздел 1. Базовые понятия. Классификация, оценка и распространение погрешностей. Итерационные методы. Разбор метода и алгоритм его реализации. Решение уравнений; методы: Хорд,секущих, Ньютона	4	2	0	6	Самост. работа	ОПК-1 ПК-1

<p>Раздел 2. Решение линейных систем алг. уравнений. Метод Гаусса с выбором главного элемента. Метод трёхдиагональной прогонки. Итерационные методы.</p>	4	2	2	4	Собесед- ние, контрольная	ОПК-1 ПК-1
<p>Раздел 3. Основные задачи теории аппроксимации. Интерп. многочлены Лагранжа и Ньютона Интерп. кубическими сплайнами. Метод наименьших квадратов. Ряды Фурье Аппр-ия многочленами. Аппр.многоч-ми Чебышева Дробно-рац. Аппроксимация.</p>	4	2	2	4	Собесед-ние	ОПК-1 ПК-1
<p>Раздел 4. Численное дифференцирование. Ряды и полиномы Тейлора. Разностная ап. производных. Дифференцирование с помощью сплайнов.</p>	4	2	2	2	Собесед-ние	ОПК-1 ПК-1
<p>Раздел 5. Численное интегрирование. Методы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Кубические интерп. слайны. Итерационный метод интегрирования.</p>	4	0	2	4	Собесед-ние	ОПК-1 ПК-1
<p>Раздел 6. Дифферен-ные уравнения с начальными условиями. Метод Эйлера. Метод Рунге-Кутта.</p>	4	2	2	4	Контр. р-та 2 ч. Собесед-ние	ОПК-1 ПК-1
<p>Раздел 7. Решение дифференциальных ур-ий с краевыми условиями. Конечно-разностный метод. Метод Галёркина. Метод Ритца. Метод конечных элементов.</p>	4	2	4	8	Собесед-ние	ОПК-1 ПК-1

Раздел 8. Решение диф. ур-ий в частных производных. Прибл. методы нахождения наименьших зн-ий функций. Решение уравнения. теплопроводности (явная хема). Решение уравнения. теплопроводности (неявная хема). Метод расщепления. Конечно-раз. метод р-ия вол-го ур-ия с гр. и н. ус. Кон. раз. метод решения р-я ур-ия Лапласа и Пуассона. Покоордин. метод. Градиентный метод.	4	2	0	12	Собесед-ние Самост-ная	ОПК-1 ПК-1
ОБЩИЙ ИТОГ (в часах)	4	14	14	44		72 часа

4.2. Содержание разделов дисциплины

Раздел 4.2.1. Базовые понятия численных методов

Свойства непрерывных, интегрируемых и дифференцируемых функций. Свойства сходящихся числовых. Многочлены Тейлора. Ортогональные ряды.

Тема 1.1. Основные понятия в численных методах

Абсолютная погрешность. Относительная погрешность. Погрешности округления. Порядок приближения. Устойчивость относительно начальных данных.

Корректно поставленная задача – существование, единственность и устойчивость относительно начальных условий (входных данных). Смысл базовых понятий: аппроксимация, интерполяция, экстраполяция, невязка.

Тема 1.2. Итерационные методы.

Определение понятий: итерационный процесс, неподвижная точка, шаг итерации.

Тема 1.3. Приближённые методы нахождения корней функций (решение нелинейных уравнений)

Метод деления отрезка пополам (метод бисекции или метод Больцано). Метод хорд (метод секущих). Метод касательных. Метод Ньютона.

Раздел 4.2.2. Численные методы решения линейных систем алгебраических уравнений

Тема 2.1. Метод Гаусса с выбором главного элемента.

Алгоритм построения прямого хода. Компьютерный алгоритм обратного хода. Оценка невязки.

Тема 2.2. Метод трёхдиагональной прогонки

Построение (вывод) прогоночных коэффициентов. Формулы для непосредственного вычисления решений системы.

Тема 2.3. Итерационные методы

Условия применения метода. Метод простых итераций. Точность расчёта

Раздел 4.2. 3. Основные задачи теории аппроксимации

Тема 3.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа и Ньютона

Построение интерполяционных многочленов Лагранжа для интерполяции и экстраполяции таблично заданной функции внутри и вне таблицы.

Тема 3.2. Кубические интерполяционные сплайны

Определение кубического интерполяционного сплайна и его применение для интерполирования таблично заданных функции.

Тема 3.3. Метод наименьших квадратов

Аппроксимация дискретно заданных функций линейной функцией (линейный тренд), логарифмической функцией, показательной функцией и квадратичной функцией методом наименьших квадратов.

Тема 3.4. Аппроксимация функций многочленами Фурье (гармонический анализ)

Ряды Фурье. Понятие ортогональности функций. Определение бесконечной системы ортогональных функций на отрезке. Разложение функции в ряд Фурье. Построение коэффициентов Фурье. Доказательство ортогональности тригонометрических систем функций:

$$\left\{ \sin \frac{k\pi x}{l} \right\}_{k=1}^{\infty} \text{ на отрезке } [0; l]; \quad \left\{ \cos \frac{k\pi x}{l} \right\}_{k=0}^{\infty} \text{ на отрезке } [0; l];$$
$$\left\{ \cos \frac{k\pi x}{l}, \sin \frac{k\pi x}{l} \right\}_{k=0}^{\infty} \text{ на отрезке } [-l; l].$$

Разложение интегрируемых функций в тригонометрические ряды Фурье. Разложение чётных и нечётных функций в тригонометрии ряды Фурье. Равномерная сходимость рядов Фурье. Приближение функции многочленом Фурье. Оценка точности. Анализ гармоник.

Тема 3.5. Аппроксимация функций многочленами Чебышева и дробно-рациональная аппроксимация

Определение многочлена Чебышева и его основные свойства. Преобразование тригонометрического вида многочленов к алгебраическому виду. Корни, максимальные и минимальные значения многочленов. Ортогональность с весом. Приближение функции многочленами Чебышева. Дробно-рациональная аппроксимация. Постановка задачи и краткое описание метода построения аппроксимации.

Раздел 4.2.4. Численное дифференцирование

Тема 4.1. Ряды и полиномы Тейлора.

Тема 4.2. Конечно-разностная аппроксимация производных функций одного аргумента

Построение конечно-разностных аппроксимаций производных первого и второго порядков с помощью многочлена Тейлора. Оценка погрешностей построенных формул.

Тема 4.3. Численное дифференцирование с помощью кубических сплайнов. Оценка погрешности.

Тема 4.3. Конечно-разностная аппроксимация частных производных

Построение конечно-разностных аппроксимаций частных производных первого и второго порядков с помощью многочлена Тейлора. Оценка погрешностей построенных формул.

Метод прямоугольников, метод трапеций, метод Симпсона. Интегрирование с помощью кубических интерполяционных сплайнов. Оценка погрешностей. Приближённые методы вычисления кратных интегралов.

Раздел 4.2.5. Численное интегрирование

Тема 5.1. Метод прямоугольников, метод трапеций, метод Симпсона

Вывод формул. Оценка погрешностей.

Тема 5.2. Кубические сплайны и интегрирование

Алгоритм вычисления. Оценка погрешностей.

Тема 5.3. Итерационный метод интегрирования

Алгоритм вычисления. Оценка погрешностей.

Раздел 4.2.6. Численные методы решения дифференциальных уравнений с начальными условиями (задача Коши)

Тема 6.1. Метод Эйлера решения дифференциального уравнения с начальными условиями

Вывод формулы Эйлера. Алгоритм решения дифференциального уравнения первого порядка с начальным условием. Решение систем диф. ур-ий первого порядка с нач. усл-ми. Решение диф. ур-ия n-го порядка ($n > 1$) с начальными условиями. Компьютерный алгоритм решения с автоматическим выбором шага.

Тема 6.2. Метод Рунге-Кутты для решения дифференциальных уравнений с начальными условиями

Вывод формулы 4-го порядка. Алгоритм решения дифференциального уравнения первого порядка с начальным условием. Решение систем диф. ур-ий первого порядка с нач. усл-ми. Решение диф. ур-ия n-го порядка ($n > 1$) с начальными условиями. Компьютерный алгоритм решения с автоматическим выбором шага.

Раздел 4.2.7. Решение линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с заданными краевыми условиями

Тема 7.1. Конечно-разностный метод

Построение конечно-разностного уравнения. Построение алгебраической системы с трёхдиагональной матрицей. Построение решения в виде дискретной функции (таблицы). Построение решения для различных краевых условий: 1-го, 2-го и 3-го рода.

Тема 7.2. Метод Галёркина

Построение линейной функции $\varphi_0(x)$ с заданными краевыми условиями. Построение системы линейно независимых функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^k$ с нулевыми краевыми условиями (базисные функции или координатные функции). Представление неизвестного решения в виде линейной комбинации базисных функций $y(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^k c_i \varphi_i(x)$.

Нахождение неизвестных коэффициентов $\{c_i(x)\}_{i=1}^k$ методом Галёркина.

Тема 7.3. Метод Ритца

Задачи вариационного исчисления. Построение по заданному уравнению соответствующего функционала. Построение линейной функции $\varphi_0(x)$ с заданными граничными условиями. Построение системы линейно независимых функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^k$ с нулевыми граничными условиями (базисные функции или координатные функции). Представление неизвестного решения в виде линейной комбинации базисных функций $y(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^k c_i \varphi_i(x)$. Построение системы Ритца для нахождения неизвестных коэффициентов $\{c_i(x)\}_{i=1}^k$ методом Ритца.

Тема 7.4. Метод конечных элементов

Система почти ортогональных функций. Определение и построение финитных функций с заданными граничными условиями. Построение производных финитных функций. Представление неизвестного решения в виде линейной комбинации финитных функций $y(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^k c_i \varphi_i(x)$. Построение алгебраической системы с трёхдиагональной матрицей для нахождения неизвестных коэффициентов $\{c_i(x)\}_{i=1}^k$.

Раздел 4.2.8. Численные методы решения диф. уравнений в частных производных.

Тема 8.1. Конечно-разностная аппроксимация одномерного уравнения теплопроводности (явная схема) с начальными и граничными условиями.

Выбор шагов интегрирования по каждой переменной. Построение конечно-разностной аппроксимации уравнения теплопроводности. Построение формулы для вычисления значения функции в каждом узле сетки. Вычисление значений искомой функции во всех граничных узлах сетки. Вычисление значений искомой функции во всех узлах сетки на нулевом временном слое. Шаблон явной схемы. Понятие вязкости, устойчивости и неустойчивости схемы. Понятие устойчивости и неустойчивости схемы решения. Условие Куранта-Леви.

Тема 8.2. Конечно-разностная аппроксимация одномерного уравнения теплопроводности (неявная схема) с заданным начальным и краевыми условиями.

Выбор шагов интегрирования по каждой переменной. Построение конечно-разностной аппроксимации уравнения теплопроводности. Шаблон неявной схемы. Вычисление значений искомой функции во всех граничных узлах сетки. Вычисление значений искомой функции во всех узлах сетки на нулевом временном слое.

Построение системы с трёхдиагональной матрицей для вычисления всех значений функции на каждом временном слое сетки.

Тема 8.3. Метод расщепления для решения двумерного уравнения теплопроводности с заданным начальным и граничными условиями.

Описание сути метода и алгоритм численного решения для явной схемы и для неявной схемы решения.

Тема 8.4. Конечно-разностный метод решения одномерного волнового уравнения с заданными краевыми и начальными условиями

Выбор шагов интегрирования и построение сетки. Построение конечно-разностной аппроксимации уравнения Пуассона. Шаблон схемы. Вычисление значений искомой функции во всех граничных узлах сетки. Построение итерационного процесса нахождения значений решения во всех узлах построенной сетки.

Тема 8.5. Конечно-разностный метод решения уравнения Лапласа и Пуассона

Выбор шагов интегрирования и построение сетки. Построение конечно-разностной аппроксимации (схемы) задачи Дирихле. Алгоритм итерационного метода решения. Оценка качества схемы.

Раздел 4.2.9. Приближённые методы нахождения наименьших значений дифференцируемых функций

Тема 9.1. Координатный (покоординатный) метод (спуск по координатам)

Начальное приближение. Построение алгоритма итерационного процесса. Оценка относительной погрешности.

Тема 9.2. Градиентный метод (метод наискорейшего спуска)

Начальное приближение. Построение алгоритма итерационного процесса. Оценка относительной погрешности.

4.3 Вид и форма промежуточной аттестации

Текущий контроль осуществляется в ходе изучения каждой темы и по окончании каждого раздела. Система, сроки и виды контроля доводятся до сведения каждого студента в начале занятий по дисциплине. В рамках текущего контроля оцениваются следующие виды работы студента:

- работа у доски;
- ответы на поставленные преподавателем вопросы;
- умение самого студента задавать вопросы;
- систематическая самостоятельная домашняя работа по математике;

- результаты выполнения аудиторных самостоятельных работ;
- знание математических формул и определений фундаментальных математических понятий в рамках соответствующих разделов «Численных методов».

Формами текущего контроля являются:

- экспресс-опрос в виде «летучки» (в конце каждой лекции и в начале практических занятий);
- проверка выполнения домашних заданий;
- письменное тестирование;
- самостоятельная работа в аудитории.

Текущий контроль проводится в период аудиторной работы студентов в установленные сроки по расписанию.

Образцы самостоятельных заданий текущего контроля

Тема: 2.2. Решение системы методом трёхдиагональной прогонки (с проверкой)

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ -x_2 - 1x_3 + 1x_4 = 0; \\ x_3 + 1x_4 - 1x_5 = 1 \\ x_4 - 2x_5 = -5 \end{cases}; \begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + 1x_4 = 0; \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_4 - x_5 = -1 \end{cases}; \begin{cases} -x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -4 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 7; \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_4 + x_5 = 9 \end{cases}; \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -5 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_3 + 3x_4 + x_5 = -1 \\ 2x_4 - x_5 = 4 \end{cases}; \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_4 - 2x_5 = -5 \end{cases}$$

Тема: 3.3. Аппроксимация табличной функции по методу наименьших квадратов. (построение линейного тренда)

Таблица 1

X	1	1.5	2.0	2.5	3	3.5
Y	1.1	1.5	1.7	1.8	2.	2.3

Таблица 2

X	1	1.5	2.0	2.5	3	3.5
Y	2.1	1.3	0.7	1.9	2.	1.8

Таблица 3

X	1	1.5	2.0	2.5	3	3.5
---	---	-----	-----	-----	---	-----

Y	3.1	2.5	1.7	2.8	2.1	2.3
---	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Таблица 4

X	1	1.5	2.0	2.5	3	3.5
Y	4.1	4.5	3.7	3.8	2.9	2.7

Таблица 5

X	1	1.5	2.0	2.5	3	3.5
Y	5.1	5.3	4.9	4.8	5.2	5.0

Таблица 6

X	1	1.5	2.0	2.5	3	3.5
Y	6.1	6.3	5.7	6.8	6.2	6.0

Тема 6.1. Решение дифференциальных уравнений методом Эйлера

Задание №1. Решите уравнение 1-го порядка (3 шага)

1. $y' = y^2 + \frac{x}{y}$, $y(2) = 4$, $h = 0,01$. 2. $y' = y^2 + 2x^2$, $y(0) = 1$, $h = 0,1$.

3. $y' = y^2 + x^2$, $y(1) = 1$, $h = 0,1$. 4. $y' = y^2 + x + 1$, $y(0) = 1$, $h = 0,1$.

5. $y' = y^2 \cdot x$, $y(0) = 2$, $h = 0,2$. 6. $y' = y^2 + 5x$, $y(2) = 1$, $h = 0,02$.

Задание №2 Решите систему (3 шага). Для всех вариантов $h=0,1$.

1. $y_1' = 2y_1 + 8y_2$, $y_1(0) = 2$, 2. $y_1' = 8y_1 - 3y_2$, $y_1(0) = 2$,

$y_2' = y_1 + 4y_2$, $y_2(0) = 4$. $y_2' = 2y_1 + y_2$, $y_2(0) = \frac{1}{3}$.

3. $y_1' = \frac{y_2 - y_1}{x}$, $y_1(1) = 1$, 4. $y_1' = 5y_1 - y_2$, $y_1(0) = 1$,

$y_2' = \frac{y_2 + y_1}{x}$, $y_2(1) = 1$. $y_2' = 2y_1 + 7y_2$, $y_2(0) = 1$.

Задание №3. Решите дифференциальное уравнение 2-го порядка с помощью преобразования уравнения в систему. Сделать три шага с $h=0,1$.

1. $y'' = \frac{3}{2}y^2$, $y(-2) = 1$, $y'(-2) = -1$.

$$2. y'' = y' + 2(1-x), y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

$$3. y'' = \frac{2(y')^2}{y-1} y^2, y(1) = 1, y'(1) = -1.$$

7.1. Конечно-разностный метод решения лин. диф. уравнения 2-го порядка с краевыми условиями

Запишите конечно-разностную систему уравнений для заданного дифференциального уравнения

$$1. y'' + \frac{2}{x-2} y' - (x-2)y = 1, y(0) = 0.5, y(1) = -1, h = 0,2.$$

$$2. y'' + xy' - x^2 y = 3x, y(1) = 0, y(2) = 2, h = 0,2.$$

$$3. y'' - y' + xy = x^2, y(0) = 2, y(1) = 4, h = 0,2.$$

8.1-8.2 Решение уравнение теплопроводности по явной схеме и по неявной схеме (сделать один шаг).

$$1. \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x + t, h_x = 0.2, h_t = 0,02, \text{начальное условие: } u(x, 0) = 2x,$$

граничные условия: $u(1, t) = 2 + t, u(2, t) = 8 + t.$

$$2. \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x - t, h_x = 0.2, h_t = 0,02, \text{начальное условие: } u(x, 0) = x^2,$$

граничные условия: $u(x, 0) = 2x, u(0, t) = 1 + t, u(1, t) = 4 + t.$

в) Примерные темы курсовых работ, критерии оценивания

Курсовая работа не предусмотрена.

5. Методические указания по организации самостоятельной работы

В течение семестра студент обязан самостоятельно прорабатывать материал, изложенный на лекциях, для чего рекомендуется использовать сделанные на лекциях конспекты, изучить основную и дополнительную литературу, предоставленные преподавателем презентации лекций. Освоение материалов и выполнение практических работ проходит при регулярных консультациях с преподавателем, для чего предоставлена возможность использовать удаленный доступ (Интернет).

5.1. Промежуточный контроль - зачет.

Перечень вопросов к зачету

1. Относительная и абсолютная погрешности. Погрешность метода, вычислительная погрешность.

2. Определение понятий: интерполирование, экстраполирование, аппроксимация функций, аппроксимационный многочлен. Определение итерационного процесса.
3. Простейшие методы приближённого нахождения корней функции (корней уравнений): метод бисекции, метод хорд (секущих), метод касательных.
4. Решение линейных алгебраических неоднородных уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента. Компьютерный алгоритм.
5. Решение линейных алгебраических неоднородных уравнений с трёхдиагональной матрицей методом прогонки. Вывод прогоночных коэффициентов. Условие применимости метода.
6. Решение линейных алгебраических неоднородных уравнений методом простых итераций.
7. Построение интерполяционного многочлена Лагранжа и область его применения.
8. Построение кубического интерполяционного сплайна. Дифференцирование и интегрирование функций с помощью, кубических сплайнов.
9. Простейшие методы численного интегрирования в конечных областях: метод прямоугольников, метод трапеций и метод Симпсона.
10. Решение дифференциального уравнения первого порядка с начальными условиями (задача Коши) методом Эйлера. Вывод формулы Эйлера. Компьютерный алгоритм.
11. Решение линейных систем дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями методом Эйлера. Компьютерный алгоритм.
12. Решение дифференциального уравнения 2-го порядка с начальными условиями методом Эйлера с помощью преобразования уравнения в линейную систему диф. уравнений первого порядка.
13. Решение дифференциального уравнения первого порядка с начальными условиями методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Вывод формулы Рунге-Кутты 4-го.
14. Решение линейных систем дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Компьютерный алгоритм.
15. Конечно-разностная аппроксимация производных первого и второго порядков. Вывод формул правосторонней, левосторонней и центральных аппроксимаций с помощью многочлена Тейлора. Оценка погрешностей полученных формул.
16. Решение линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с заданными граничными условиями 1-го, 2-го или 3-го рода методом конечных разностей.
17. Решение линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с заданными граничными условиями 1-го рода методом Галёркина. Построение линейной функции $\varphi_0(x)$ с заданными граничными условиями. Построение системы линейно независимых функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^k$ с нулевыми граничными условиями (базисные функции или координатные функции). Представление неизвестного решения в виде линейной комбинации базисных функций $y(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^k c_i \varphi_i(x)$. Алгоритм нахождения неизвестных коэффициентов $\{c_i(x)\}_{i=1}^k$ в методе Галёркина.
18. Решение линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с заданными граничными условиями 1-го рода методом Рунге. Построение линейной функции $\varphi_0(x)$ с заданными граничными условиями. Построение системы линейно независимых функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^k$ с нулевыми граничными условиями (базисные функции или координатные функции). Представление неизвестного решения в виде линейной комбинации базисных функций $y(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^k c_i \varphi_i(x)$. Построение соответствующего функционала. Построение системы для нахождения. Построение линейной функции $\varphi_0(x)$ с заданными граничными условиями. Построение системы линейно независимых функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^k$ с нулевыми граничными условиями (базисные функции или координатные функции).

Представление неизвестного решения в виде линейной комбинации базисных функций $y(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^k c_i \varphi_i(x)$. Нахождение неизвестных $\{c_i(x)\}_{i=1}^k$ в методе Ритца.

19. Решение линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с заданными граничными условиями 1-города методом МКЭ.

20. Конечно-разностная аппроксимация одномерного уравнения теплопроводности (явная схема) с начальным условием и граничными условиями.

21. Конечно-разностная аппроксимация одномерного уравнения теплопроводности (неявная схема) с заданным начальным и граничными условиями. матрицей для вычисления всех значений функции на каждом временном слое сетки.

22. Метод расщепления для решения двумерного уравнения теплопроводности с заданным начальным и граничными условиями. Описание сути метода и алгоритм численного решения для явной схемы и для неявной схемы решения.

23. Конечно-разностный метод решения одномерного волнового уравнения с заданными граничными и начальными условиями

24. Покоординатный метод. Начальное приближение. Построение алгоритма итерационного процесса. Оценка относительной погрешности.

25. Градиентный метод. Начальное приближение. Построение алгоритма итерационного процесса. Оценка относительной погрешности.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) Основная литература

1. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. Учебное пособие. Вагер Б.Г. РГГМУ–СПб., 2004.– 110 с.
2. Вычислительная математика. Учебное пособие. Г.И.Беликова, Б.Г. Вагер и др. — СПб.: РГГМУ–СПб., 2019.– 173 с.
3. http://elib.rshu.ru/files_books/pdf/rid_b078cb90d5894ce1a3a3e9b62d37868d.pdf

б) Дополнительная литература

1. Ряды. Интеграл Фурье и преобразование Фурье. Приложения. И.М. Аксенкова и др. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ».2009.– 208 с.
2. Многочлены Чебышева. – М.: Едиториал. – УРСС. 2003. – 160с.
3. Численные методы. Использование MATLAB. Джон Г. Мэтьюз.– М. Вильямс. 2001. – 715с.
4. Основные методы вычислительной математики. Фаддеев М.А., Марков К.А. .– СПб.: Издательство «Лань», 2008.– 160 с.
5. Численные методы. Вержбицкий В.М.: «Высшая школа», М., 2000. 265с.
6. Численные методы . Волков Е.А. – М. : Наука. 1987.250с.
7. Численные методы линейной алгебры. Шевцов Г.С. и др.– СПб.: Издательство «Лань», 2011.–496с.
8. Введение в численный анализ. Баракнин В.Б. и др.– СПб.: Издательство «Лань», 2005.– 112с.
9. Численные методы. Зализняк В.Е.–М.: Издательство Юрайт, 2015.–356 с.
10. Численные методы. Калиткин. Н.Н . : «Наука», М., 1978. –51 0с.
11. Методы вычислительной математики. Марчук Г.И : «Наука», М., 1977. –456 с.
12. Вычислительная математика. Поршнева С. В. Курс лекций. –Спб.: БХВ– Петербург. 2004.–320 с.
13. Численные методы. Самарский А.А. Гулин А.В. Учебное пособие для вузов.– М.: Наука. гл. ред. физ. мат. лит. 1989. –432 с.

14. Введение в численные методы. Самарский А.А. Учебное пособие для вузов.– М.: Наука. гл. ред. физ. мат. лит. 1982. – 272 с.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

windows 7 48130165 21.02.2011

office 2010 49671955 01.02.2012

windows 7 47049971 18.06.2010

office 2013 62398416 11.09.2013

windows 7 48130165 21.02.2011

office 2010 49671955 01.02.2012

windows 7 48130165 21.02.2011

office 2010 49671955 01.02.2012

GNU Fortran - компилятор (свободно распространяемое программное обеспечение).

д) профессиональные базы данных

база данных Web of Science

база данных Scopus

электронно-библиотечная система elibrary

е) информационные справочные системы:

1. Электронно-библиотечная система ГидроМетеоОнлайн. Режим доступа: <http://elib.rshu.ru>
2. Электронно-библиотечная система Знаниум. Режим доступа: <http://znanium.com>

7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Вид учебных занятий	Организация деятельности студента
Лекции (разделы №1-8)	Написание конспекта лекций: кратко, схематично, последовательно фиксировать основные положения, выводы, формулировки, обобщения; помечать важные мысли, выделять ключевые слова, термины. Проверка терминов, понятий, технических характеристик с помощью устного опроса в конце лекций Если самостоятельно не удастся разобраться в материале, необходимо сформулировать вопрос и задать преподавателю на лекции, на консультации, или с использованием удаленного доступа через Интернет
Практические занятия (разделы №1-7)	Проработка методов решения типовых задач в рассматриваемой области численных методов.
Подготовка к зачету (экзамену)	При подготовке к зачету (экзамену) необходимо прежде всего использовать конспекты лекций и материал практических занятий, рекомендуемую литературу, вопросы для подготовки к зачету

(экзамену).

8. Информационные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Раздел дисциплины	Образовательные и информационные технологии
Разделы 1-9	1. организация взаимодействия с обучающимися посредством электронной почты <u>образовательные технологии</u> 1. интерактивное взаимодействие педагога и студента 2. сочетание индивидуального и коллективного обучения

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины

1. **Учебная аудитории для проведения занятий лекционного типа** – укомплектована большими и качественными досками. Помещение должно быть хорошо освещённым и проветриваемым. Количество столов должно соответствовать количеству студентов на потоковых лекциях.
2. **Учебная аудитории для проведения практических занятий** - укомплектована специализированной (учебной) мебелью, техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации, оснащенная компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечено доступом в электронную информационно-образовательную среду организации
3. **Учебная аудитория для групповых и индивидуальных консультаций** - укомплектована специализированной (учебной) мебелью, техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации.
4. **Учебная аудитория для текущего контроля и промежуточной аттестации** - укомплектована специализированной (учебной) мебелью, техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации.
5. **Помещение для самостоятельной работы** – укомплектовано специализированной (учебной) мебелью, оснащено компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечено доступом в электронную информационно-образовательную среду организации