

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и теоретической механики

Рабочая программа дисциплины

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Основная профессиональная образовательная программа
высшего образования по направлению подготовки

03.03.02 «Физика»

Направленность (профиль):

Геофизика

Уровень:

Бакалавриат

Форма обучения

Очная

Согласовано
Руководитель ОПОП



Бобровский А.П.

Председатель УМС

 И.И. Палкин

Рекомендована решением
Учебно-методического совета

19 мая 2021 г., протокол № 08

Рассмотрена и утверждена на заседании кафедры

05 мая 2021 г., протокол № 10

Зав. кафедрой  Зайцева И.В.

Авторы-разработчики:

 Герасименко Н.И.
Петрова В.В.

Санкт-Петербург 2021

1. Цель:

Важнейшей целью курса «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» (ИУВИ) является ознакомление студентов с методологией, общими принципами и методами решения интегральных уравнений и их применение к решению вариационных задач. Дисциплина «ИУВИ» вырабатывает у студентов навыки построения математических моделей простейших физических явлений и решения получающихся при этом математических задач. Она составляет математическую основу дисциплин общей и теоретической физики и специальных дисциплин, читаемых на кафедрах.

Задачи:

- **Приобретение** теоретической и практической подготовки студентов в области методов решения различных интегральных уравнений и применения этих методов к решению прикладных задач. Приобретение навыков самостоятельного решения практических задач.

- **Освоение** теоретической и практической части в области методов решения различных интегральных уравнений и применения этих методов к решению прикладных задач. является ознакомление студентов с методологией, общими принципами и методами решения интегральных уравнений и их применение к решению вариационных задач. Дисциплина «ИУВИ» вырабатывает у студентов навыки освоения построения математических моделей простейших физических явлений и решения получающихся при этом математических задач. Она составляет математическую основу дисциплин общей и теоретической физики и специальных дисциплин, читаемых на кафедрах.

- **Формирование** знаний, умений и владений, благодаря которым студенты смогут решать вариационные задачи, получать интегральные уравнения, моделирующие различные прикладные задачи, и решать их.

2. Место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы

Дисциплина «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» для направления подготовки 03.03.02–физика относится к дисциплинам основной части блока 1 дисциплины (модуля).

Дисциплина изучается студентами в 4 семестре, трудоемкость 108 акад. часов, 3 з.е.

Для освоения данной дисциплины, обучающиеся должны освоить дисциплину модулей: «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения».

Дисциплина «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» является базовой для освоения дисциплин «Численные методы и математическое моделирование», «Линейные и нелинейные уравнения физики».

3. Перечень планируемых результатов обучения

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование компетенций:
УК-1, ОПК-1

Универсальные компетенции.

Код и наименование универсальной компетенции	Код и наименование индикатора достижения универсальной компетенции	Результаты обучения
УК-1 Способен осуществлять поиск,	УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя ее базовые	УК-1.1. Знать: _Основы анализа

<p>критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач</p>	<p>составляющие.</p> <p>УК-1.2. Определяет и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи.</p> <p>УК-1.3. Осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи по различным типам запросов.</p>	<p>задачи__</p> <p>Уметь: _Ранжировать информацию__</p> <p>Владеть: _способом поиска информации_</p> <p>УК-1.2.</p> <p><u>Знать:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - основные понятия дисциплины интегральные уравнения и вариационное исчисление; - основные методы решения интегральных уравнений и вариационных задач; <p><u>Уметь:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - решать практические задачи математическими методами дисциплины интегральные уравнения и вариационное исчисление; <p>Владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> - навыками решения интегральных уравнений, моделирующих различные прикладные задачи
--	---	--

Общепрофессиональные компетенции.

Код и наименование общепрофессиональной компетенции	Код и наименование индикатора достижения общепрофессиональной компетенции	Результаты обучения
<p>ОПК-1 Способен применять базовые знания в области математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности</p>	<p>ОПК-1.1 Применяет основные законы математических и естественных наук для решения профессиональной деятельности.</p> <p>ОПК-1.2 Выявляет взаимосвязь основных законов естественных наук, общие подходы и концепции.</p>	<p>Знать: _Законы сохранения_ следующие из теоремы Нетер_____</p> <p>Уметь: _Находить уравнения баланса_____</p> <p>Владеть: _Методом расщепления_ для интегральных операторов_____</p>

4. Структура и содержание дисциплины

4.1. Объем дисциплины

Объем дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 академических часов.

Таблица 4.

Объем дисциплины по видам учебных занятий в академических часах

Объем дисциплины 2015, 2016, 2017, 2018,2019,2020,2021	Всего часов		
	Очная форма обучения	Очно-заочная форма обучения	Заочная форма обучения
Объем дисциплины	108		
Контактная работа с обучающимися преподавателем (по видам аудиторных учебных занятий) – всего:	42		
в том числе:	-	-	-
лекции	14		
занятия семинарского типа:			
практические занятия	28		
лабораторные занятия			
Самостоятельная работа (далее – СРС) – всего:	66		
в том числе:	-	-	-
курсовая работа			
контрольная работа			
подготовка к экзамену	36		
Вид промежуточной аттестации	экзамен		

4.2. Структура дисциплины

Таблица 5.

Структура дисциплины для очной формы обучения

№	Раздел / тема дисциплины	Семестр	Виды учебной работы, в т.ч. самостоятельная работа студентов, час.			Формы текущего контроля успеваемости	Формируемые компетенции	Индикаторы достижения компетенций
			Лекции	Практические занятия	СРС			
1	Линейное пространство функций.	4	2	4	10	Письменный опрос	УК-1, ОПК-1	УК-1.1, УК-1.2, УК-1.3, ОПК-1.1, ОПК-1-2
2	Уравнения Эйлера – Лагранжа для основных функционалов.	4	2	4	10	Письменный опрос	УК-1, ОПК-1	УК-1.1, УК-1.2, УК-1.3, ОПК-1.1, ОПК-1-2
3	Фурье – разложение δ – функции.	4	2	4	10	Письменный опрос	УК-1, ОПК-1	УК-1.1, УК-1.2, УК-1.3, ОПК-1.1, ОПК-1-2
4	Уравнения с разностным ядром.	4	2	4	10	Письменный опрос	УК-1, ОПК-1	УК-1.1, УК-1.2, УК-1.3, ОПК-1.1, ОПК-1-2
5	Резольвента уравнения Фредгольма второго рода.	4	2	4	10	Письменный опрос	УК-1, ОПК-1	УК-1.1, УК-1.2, УК-1.3, ОПК-1.1, ОПК-1-2
6	Структура симметричного ядра.	4	2	4	10	Письменный опрос	УК-1, ОПК-1	УК-1.1, УК-1.2, УК-1.3, ОПК-1.1, ОПК-1-2
7	Структура итерированных ядер для симметричного ядра.	4	2	4	6	Письменный опрос	УК-1, ОПК-1	УК-1.1, УК-1.2, УК-1.3, ОПК-1.1, ОПК-1-2
ИТОГО		108	14	28	66	экзамен	-	-

4.3. Содержание разделов/тем дисциплины

Наименование разделов и тем	Содержание
Линейное пространство функций.	Линейное пространство функций. Функционалы. Линейные функционалы. Вариация функционала и функции, стационарная точка. Теорема о необходимом условии экстремума функционала.
Уравнения Эйлера – Лагранжа для основных функционалов.	Основная лемма вариационного исчисления. Уравнения Эйлера – Лагранжа для основных функционалов. Ядро линейного функционала – обобщенная функция. Определение δ – функции и ее простейшие свойства. δ – функция как предел непрерывной функции. Связь δ – функции с ортонормированными системами функций.
Фурье – разложение δ – функции.	Фурье – разложение δ – функции. Функция Грина линейного уравнения и ее связь с δ – функцией. Связь δ – функции и θ – функции. Интегральные уравнения. Примеры интегральных уравнений. Классификация интегральных уравнений. Примеры интегральных преобразований.
Уравнения с разностным ядром.	Уравнения с разностным ядром. Уравнения с вырожденным ядром. Уравнение Абеля. Задача Штурма – Лиувилля, общая постановка задачи. Задача Штурма – Лиувилля для уравнения с вырожденным ядром.
Резольвента уравнения Фредгольма второго рода.	Резольвента уравнения Фредгольма второго рода. Уравнения для резольвенты. Резольвента для уравнения с разностным ядром. Разложение резольвенты в ряд по λ . Итерированные ядра. Соотношения между итерированными ядрами. Симметричное ядро. Теорема о существовании решений задачи Штурма – Лиувилля для симметричного ядра. Теорема о собственных функциях и характеристических числах симметричного ядра. Вырожденные характеристические числа, степень вырождения. Собственные функции вырожденных характеристических чисел и их ортогонализация.
Структура симметричного ядра.	Структура симметричного ядра. Число собственных функций. Структура резольвенты для симметричного ядра.
Структура итерированных ядер для симметричного ядра.	Структура итерированных ядер для симметричного ядра. Оценки для модулей характеристических чисел. Методы приближенного решения задачи Штурма-Лиувилля для симметричного ядра.

4.4. Содержание занятий семинарского типа

Содержание практических занятий для очной формы обучения

№ темы дисциплины	Тематика практических занятий	Всего часов	В том числе часов практической подготовки
1	Линейное пространство функций.	4	
2	Уравнения Эйлера – Лагранжа для основных функционалов.	4	
3	Фурье – разложение δ – функции.	4	
4	Уравнения с разностным ядром.	4	
5	Резольвента уравнения Фредгольма второго рода.	4	

6	Структура симметричного ядра.	4	
7	Структура итерированных ядер для симметричного ядра.	4	

5. Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине.

1. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://window.edu.ru/>
2. MOODLE.
3. Cloud.rshu.ru.

5.1. Текущий контроль

Письменный контроль.

а). Образцы тестовых и контрольных заданий текущего контроля

Задание:.

Вариант 1.

$$I(y) = \int_0^1 (2e^y - y^2) dx$$

1. Найти возможную экстремаль $y(0) = 1, y(1) = e$.

$$I(y) = \int_0^1 (x^2 + (y')^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

2. Решить изопериметрическую задачу

$$\int_0^1 y^2 dx = 2$$

$$I(y) = \int_0^{\pi/4} (5y^2 - 2(y')^2) e^{-x} dx, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi/2) = 0.$$

3. Исследовать на слабый экстремум

Вариант 2.

$$I(y) = \int_0^1 ((y')^2 + 4y^2) dx, \quad y(0) = e^2, \quad y(1) = 1.$$

1. Найти возможную экстремаль

$$I(y) = \int_0^1 (y')^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{1}{4},$$

2. Решить изопериметрическую задачу

$$\int_0^1 (y - (y')^2) dx = \frac{1}{12}$$

$$I(y) = \int_0^5 (y')^3 dx$$

3. Исследовать на слабый экстремум

$$y(0) = 0, \quad y(5) = 15.$$

Вариант 3.

- Найти возможную экстремаль $I(y) = \int_1^e (x(y')^2 + yy') dx$, $y(1) = 0$, $y(e) = 1$.
- Решить изопериметрическую задачу $x_1(0) = x_2(0) = x_2(1) = 0$, $x_1(1) = 2$, $\int_0^1 (y')^3 dx$.
- Исследовать на слабый экстремум $I(y) = \int_1^2 \frac{1}{x^4} dx$, $y(1) = 1$, $y(2) = 15$.

5.2. Методические указания по организации самостоятельной работы

Решить следующие задания.

Вариант 1.

1. Найти возможную экстремаль $I(y) = \int_0^1 y(y')^2 dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = \sqrt[3]{4}$.
 2. Решить изопериметрическую задачу $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_1(1) = 1$, $x_2(1) = -3$, $\int_{1/2}^2 (36(y')^2 - \frac{5y^2}{x^2}) dx$, $y(1/2) = 2^{-5/6}$.
- Исследовать на слабый экстремум

Вариант 2.

1. Найти возможную экстремаль $I(y) = \int_0^\pi (4y \cos x + (y')^2 - y^2) dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.
 2. Решить изопериметрическую задачу $x_1(0) = x_1(1) = x_2(0) = 0$, $x_2(1) = 1$.
 3. Исследовать на слабый экстремум $I(y) = \int_1^{16} (5y^2 + 16x^2(y')^2) dx$, $y(1) = 1$, $y(16) = 2^{-5}$.
- Найти общий вид экстремалей $I(x) = \int_a^b \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$.

5.3 Промежуточный контроль

Решение задач.

Образцы тестов, заданий

Задание:

Задания для контроля

Вариант 1.

4. Найти возможную экстремаль $I(y) = \int_0^1 (2e^y - y^2) dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = e$.

5. Решить изопериметрическую задачу $I(y) = \int_0^1 (x^2 + (y')^2) dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$,
 $\int_0^1 y^2 dx = 2$.

6. Исследовать на слабый экстремум $I(y) = \int_0^{\pi/4} (5y^2 - 2(y')^2) e^{-x} dx$, $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = 0$.

Вариант 2.

4. Найти возможную экстремаль $I(y) = \int_0^1 ((y')^2 + 4y^2) dx$, $y(0) = e^2$, $y(1) = 1$.

5. Решить изопериметрическую задачу $I(y) = \int_0^1 (y')^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1/4$,
 $\int_0^1 (y - (y')^2) dx = \frac{1}{12}$.

6. Исследовать на слабый экстремум $I(y) = \int_0^5 (y')^3 dx$, $y(0) = 0$, $y(5) = 15$.

Вариант 3.

• Найти возможную экстремаль $I(y) = \int_1^e (x(y')^2 + yy') dx$, $y(1) = 0$, $y(e) = 1$.

• Решить изопериметрическую задачу $x_1(0) = x_2(0) = x_2(1) = 0$, $x_1(1) = 2$,
 $\int_0^1 (y')^3 dx$

• Исследовать на слабый экстремум $I(y) = \int_1^2 \frac{1}{x^4} dx$, $y(1) = 1$, $y(2) = 15$.

Вариант 4.

4. Найти возможную экстремаль $I(y) = \int_0^{\pi} (4y \cos x + (y')^2 - y^2) dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

5. Решить изопериметрическую задачу $x_1(0) = x_1(1) = x_2(0) = 0$, $x_2(1) = 1$.

6. Исследовать на слабый экстремум $I(y) = \int_1^{16} (5y^2 + 16x^2 (y')^2) dx$, $y(1) = 1$, $y(16) = 2^{-5}$.

$$I(x) = \int_a^b \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

7. Найти общий вид экстремалей

Вариант 5.

$$I(y) = \int_0^1 y(y')^2 dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = \sqrt[3]{4}.$$

8. Найти возможную экстремаль

9. Решить изопериметрическую задачу $x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = -3.$

$$I(y) = \int_{1/2}^2 (36(y')^2 - \frac{5y^2}{x^2}) dx, \quad y(1/2) = 2^{-5/6},$$

Исследовать на слабый экстремум

$$y(2) = 2^{5/6}.$$

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

Учет успеваемости обучающегося по дисциплине осуществляется по 100-балльной шкале. Максимальное количество баллов по дисциплине за один семестр – 100:

- максимальное количество баллов за выполнение всех видов текущего контроля - 60;

- максимальное количество баллов за посещение лекционных занятий - 10;

максимальное количество баллов за прохождение промежуточной аттестации - 30;

- максимальное количество дополнительных баллов - 5

6.1. Текущий контроль

Типовые задания, методика выполнения и критерии оценивания текущего контроля по разделам дисциплины представлены в Фонде оценочных средств по данной дисциплине.

6.2. Промежуточная аттестация

Форма промежуточной аттестации по дисциплине – **экзамен**.

Форма проведения экзамена: устный опрос по теоретическим вопросам.

Перечень вопросов для подготовки к экзамену

УК-1

ОПК-1

1. *Что такое интегральное преобразование, и какие преобразования вам известны
2. *Что такое интегральное уравнение (ИУ)
3. *Какие ИУ называются однородными
4. *Записать общий вид линейного ИУ
5. *Что такое ядро интегрального преобразования
6. *Каковы основные типы линейных ИУ
7. *В чем различие между ИУ Вольтерра и Фредгольма
8. ИУ Вольтерра как частный случай ИУ Фредгольма
9. Записать выражение для интегрального оператора через ядро
10. *Какие векторы называются ортогональными
11. Как ортогонализировать неортогональную систему функций
12. Какие ортогональные системы называются полными
13. *Что такое ортонормированный базис
14. *Дать определения линейного оператора

15. *Что такое собственный вектор и собственное значение некоторого оператора
16. *Какие операторы называются симметричными (эрмитовыми)
17. *Что характерно для собственных функций и собственных чисел эрмитового оператора
18. *Что такое кратность вырождения собственного значения
19. *Сформулировать задачу Штурма-Лиувилля
20. *Что такое собственная функция оператора Штурма-Лиувилля
21. *Является ли оператор Штурма-Лиувилля симметричным
22. *Что характерно для собственных функций оператора Штурма-Лиувилля
23. Какой оператор Штурма-Лиувилля называется неособенным (особенным)
24. *Какой оператор является обратным оператору Штурма-Лиувилля и что под этим понимается
25. *Какой оператор является обратным оператору Фредгольма с симметричным и непрерывным ядром и что под этим понимается
26. Сформулировать теорему Фредгольма для неоднородного интегрального уравнения
27. Что такое резольвента ядра

Вариационное исчисление

28. *Какие задачи решает вариационное исчисление
29. *Дать определение линейного пространства
30. *Привести примеры линейных пространств
31. *Дать определение функционала в линейном пространстве
32. Привести примеры функционалов в линейном пространстве
33. Дать определение линейного функционала и привести примеры
34. *Дать определение относительного минимума (максимума) функционала
35. *Дать определение вариации функционала и вариации функции
36. *Сформулировать необходимое условие экстремума функционала
37. *Дать определение стационарной точки функционала
38. Сформулировать основную лемму вариационного исчисления
39. Записать уравнения Эйлера-Лагранжа для простейшего функционала

Перечень практических заданий к экзамену:

УК-1

ОПК-1

Вариант 1.

7. Найти возможную экстремаль
$$I(y) = \int_0^1 (2e^y - y^2) dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e.$$

8. Решить изопериметрическую задачу
$$I(y) = \int_0^1 (x^2 + (y')^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

$$\int_0^1 y^2 dx = 2.$$

9. Исследовать на слабый экстремум
$$I(y) = \int_0^{\pi/4} (5y^2 - 2(y')^2) e^{-x} dx, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi/2) = 0.$$

Вариант 2.

7. Найти возможную экстремаль $I(y) = \int_0^1 ((y')^2 + 4y^2) dx$, $y(0) = e^2$, $y(1) = 1$.

8. Решить изопериметрическую задачу $I(y) = \int_0^1 (y')^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1/4$,

$$\int_0^1 (y - (y')^2) dx = \frac{1}{12}.$$

9. Исследовать на слабый экстремум $I(y) = \int_0^5 (y')^3 dx$, $y(0) = 0$, $y(5) = 15$.

Вариант 3.

• Найти возможную экстремаль $I(y) = \int_1^e (x(y')^2 + yy') dx$, $y(1) = 0$, $y(e) = 1$.

• Решить изопериметрическую задачу $x_1(0) = x_2(0) = x_2(1) = 0$, $x_1(1) = 2$.

• Исследовать на слабый экстремум $I(y) = \int_1^2 \frac{(y')^3}{x^4} dx$, $y(1) = 1$, $y(2) = 15$.

Вариант 4.

10. Найти возможную экстремаль $I(y) = \int_0^\pi (4y \cos x + (y')^2 - y^2) dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

11. Решить изопериметрическую задачу $x_1(0) = x_1(1) = x_2(0) = 0$, $x_2(1) = 1$.

12. Исследовать на слабый экстремум $I(y) = \int_1^{16} (5y^2 + 16x^2 (y')^2) dx$, $y(1) = 1$, $y(16) = 2^{-5}$.

13. Найти общий вид экстремалей $I(x) = \int_a^b \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$.

Вариант 5.

14. Найти возможную экстремаль $I(y) = \int_0^1 y(y')^2 dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = \sqrt[3]{4}$.

15. Решить изопериметрическую задачу $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_1(1) = 1$, $x_2(1) = -3$.

Исследовать на слабый экстремум $I(y) = \int_{1/2}^2 (36(y')^2 - \frac{5y^2}{x^2}) dx$, $y(1/2) = 2^{-5/6}$,

$$y(2) = 2^{5/6}.$$

6.3. Балльно-рейтинговая система оценивания

Таблица 14.

Распределение баллов по видам учебной работы

Вид учебной работы, за которую ставятся баллы	Баллы
Посещение лекционных занятий	10
Письменный опрос	30
Экзамен	30
...	
Промежуточная аттестация	30
ИТОГО	100

Таблица 15.

Распределение дополнительных баллов

Дополнительные баллы (баллы, которые могут быть добавлены до 100)	Баллы
Участие в НИРС*	2
Участие в Олимпиаде*	2
Активность на учебных занятиях*	1
ИТОГО	5

Минимальное количество баллов для допуска до промежуточной аттестации составляет 40 баллов при условии выполнения всех видов текущего контроля.

Балльная шкала итоговой оценки на экзамене

Оценка	Баллы
Отлично	85-100
Хорошо	65-84
Удовлетворительно	40-64
Неудовлетворительно	0-39

7. Методические рекомендации для обучающихся по освоению дисциплины

Методические рекомендации ко всем видам аудиторных занятий, а также методические рекомендации по организации самостоятельной работы, в том числе по подготовке к текущему контролю и промежуточной аттестации представлены в Методических рекомендациях для обучающихся по освоению дисциплины «Интегральное уравнение и вариационное исчисление».

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

8.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

Основная литература

1. Волков В.Т. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. М.: КДУ, 2009 – 140 с.
2. Буслаев В.С. Вариационное исчисление. М.: Изд. Ленинградского университета, 2016 – 280 с.
3. Азбелев Н.Ф. Функционально-дифференциальные уравнения и вариационные задачи. М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006 – 122 с.
4. Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление. - М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
5. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. Задачи и примеры с подробными решениями. - М.: Эдиториал УРСС, 2002.

- Багров В. Г., Белов В. В., Задорожный В. Н., Трифонов А. Ю. Элементы современной математической физики. Изд. ТПУ, Томск, 2004.

Дополнительная литература

- Краснов М.П. Интегральные уравнения. Введение в теорию. М.: Наука, 1981.
 - Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.
 - Основы вариационного исчисления. М.: Наука, 1980.
 - Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М.: Физматлит., 1961
- 1 8.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=234983>
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=222878>>
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=264983>
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=272878>>
- 8.3. Перечень программного обеспечения
Windows, MatLab
 - 8.4. Перечень информационных справочных систем
не используется
 - 8.5. Перечень профессиональных баз данных
Moodle

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины

- Аудитория для проведения лекционных и практических занятий.
- Компьютерный класс.
- Мультимедийный проектор.

10. Особенности освоения дисциплины для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Обучение обучающихся с ограниченными возможностями здоровья при необходимости осуществляется на основе адаптированной рабочей программы с использованием специальных методов обучения и дидактических материалов, составленных с учетом особенностей психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья таких обучающихся (обучающегося).

При определении формы проведения занятий с обучающимся-инвалидом учитываются рекомендации, содержащиеся в индивидуальной программе реабилитации инвалида, относительно рекомендованных условий и видов труда.

При необходимости для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья создаются специальные рабочие места с учетом нарушенных функций и ограничений жизнедеятельности.

11. Возможность применения электронного обучения и дистанционных образовательных технологий

Дисциплина может реализовываться с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий.

Рассмотрено и рекомендовано к использованию в учебном процессе на 2022/2023 учебный год без изменений.

Протокол заседания кафедры высшей математики и теоретической механики от 15.06.2022 №11