А.Н. Павлов, В.А. Голосовская, Н.А. Саноцкая

ПОИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕКИ

A.N. Pavlov, V.A. Golosovskaya, N.A. Sanotskaya

SEARCHES OF THE MATHEMATICAL DEFINITION OF THE RIVER

Дан анализ связей между длинами рек и площадями их водосборных бассейнов, позволивший построить простую систему уравнений, описывающих целостность этой гидрологической структуры.

Ключевые слова: объект и предмет изучения, определения реки, линейная связь, экспонента, логистическая функция, скорость роста (формирования).

Analysis of connections between rivers' lengths and their drainage basins areas permitted to create simple system of equations describing the wholeness of this hydrologic structure.

Key words: object and subject of investigation, definition of the river, linear connection, exponential function, logistical function, rate of the growth (formation).

Наука должна развиваться в
направлении к общности и простоте.
Анри Пуанкаре.

Введение

Научные исследования принято начинать с определений объекта и предмета изучения. Они могут быть удачными и не очень, могут меняться по мере трансформации взглядов и получения новой информации. Но без них не принято обходиться.

Реальные реки – это объект изучения гидрологии. Он является той частью внешнего мира, которая существует объективно. Измерение расходов, уровней, температур, отбор проб на химический анализ и так далее представляют собой то, что можно назвать получением первичной, натурной информации.

Гидрографы, результаты лабораторных анализов и другие измеренные на натуре характеристики следует отнести к понятиям предмета изучения. Это субъективный мир, перенесённый из реальности в наши головы. И вся работа здесь сводится к процедурам анализа и синтеза. Это происходит уже на уровне абстрактных понятий [6].

Одно из ранних определений реки, как объекта, авторы встретили в справочнике-словаре А. С. Баркова [1]:

- Реки, естественный сток воды, скопляющейся из атмосферных осадков, образуется благодаря уклону местности.

Немного нескладно, но понятно. Далее это определение дополняется с помощью таких характеристик, как эрозия, долина, профиль и т. п. Ниже, по алфавиту, обсуждаются понятия речной воды, речной сети, речной системы, речного бассейна.

В более поздних словарях [2,9] говорится нечто похожее:

- Река – водный поток, протекающий в долине и характеризующийся достаточно большими размерами (от нескольких – до тысяч километров).

В отличие от первого определения, здесь уже появляется морфологический параметр и линейные размеры общего порядка.

В последнем издании Толкового словаря русского языка [4] в определении реки появляются термины «русло», «естественное течение», «исток» и «устье».

Занимаясь вопросами симметрии и асимметрии речных бассейнов [7,8], авторы почувствовали необходимость в определении реки как некого формализованного понятия, которое можно было бы использовать для осмысления проблем формирования, моделирования, прогноза и управления.

Всякая река имеет длину (L) и площадь водосбора (S). Это измеряемые и, в известном смысле, интегральные характеристики. Они позволяют говорить о реке в геометрических терминах. Естественно было поискать связи между ними. На рис.1, 2, 3 даются примеры линейной зависимости соответственно для правых притоков Камы, р. Амура и правых притоков Кубани.

Простая корреляция почти во всех рассмотренных случаях оказалась довольно высокой. Явное исключение составила только р. Кубань (по правым притокам). Там связь практически отсутствует. Объяснение здесь может быть связано с существованием резкой асимметрии бассейна [8]. *Видимо, можно полагать, что коэффициент корреляции при рассмотрении линейной связи между длинами притоков реки (L) и их площадями (S) является мерой симметрии всего бассейна. С генетической точки зрения такой вывод правдоподобен. Ещё несформированная часть бассейна имеет хаотическую пространственную структуру.*

Однако линейная связь площади (S) и длины (L) создаёт трудности, которые можно назвать парадоксом с физико-географической точки зрения. Во всех рассмотренных случаях при значимой корреляции (исключение опять же составляет только р. Кубань) прямая $S(L)$ пересекает ось абсцисс в положительной части шкалы. А это означает, что река уже есть ($L_0 > 0$), а площади, где она формируется, ещё нет ($S = 0$).

Более реалистично выглядит другая ситуация, когда площадь существует ($S>0$), но реки ещё нет ($L=0$). Это естественно, поскольку площадь будущего водосбора «задаётся» геологическими процессами [7]. Появление же в её пределах реки – это вторичный акт, обусловленный метеорологическими факторами. Он требует времени, необходимого для заложения постоянного русла. На начальной стадии атмосферные осадки, формируя различные формы стока, ещё не определяют появление реки как некой постоянно существующей системы. Она возникает несколько позже. Дл этого эрозионные процессы должны раскрыть хотя бы верхние горизонты подземных вод, способные обеспечить меженное питание. Используя такой вариант как постулат, авторы рассмотрели экспоненциальную зависимость $S = S_0 e^{\lambda L}$. Для этого есть простая предпосылка: экспоненциальный закон широко «работает» в природе. В наиболее общем виде он носит название «закон роста».

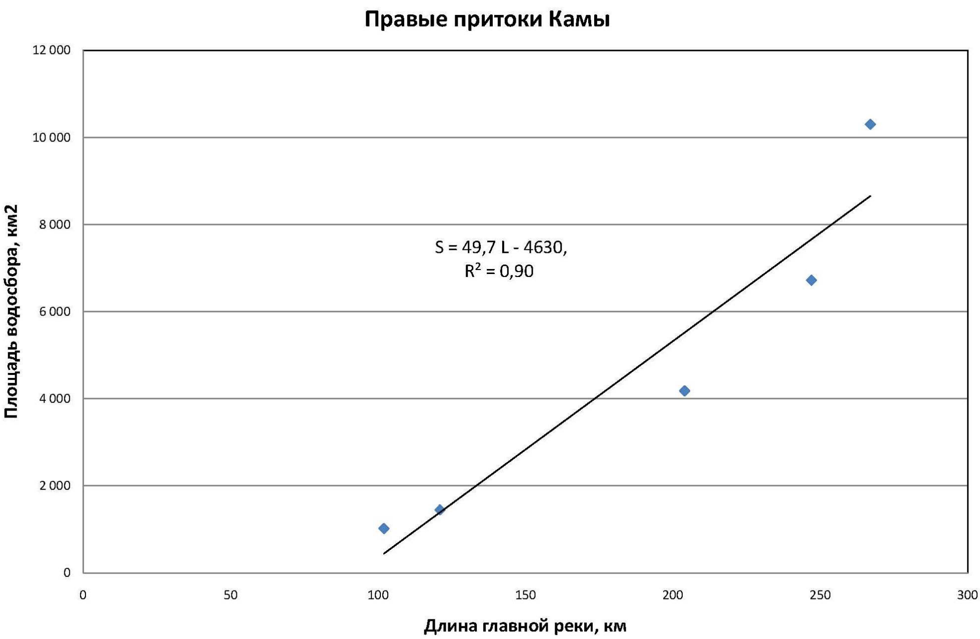


Рис.1. Линейная зависимость *S* (*L*).

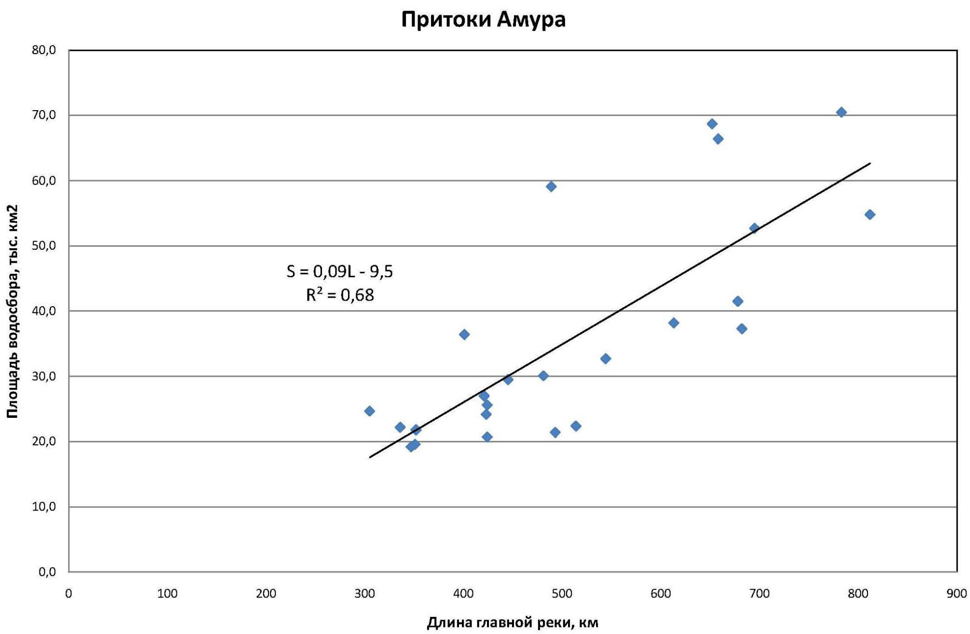


Рис.2. Линейная зависимость *S*(*L*).

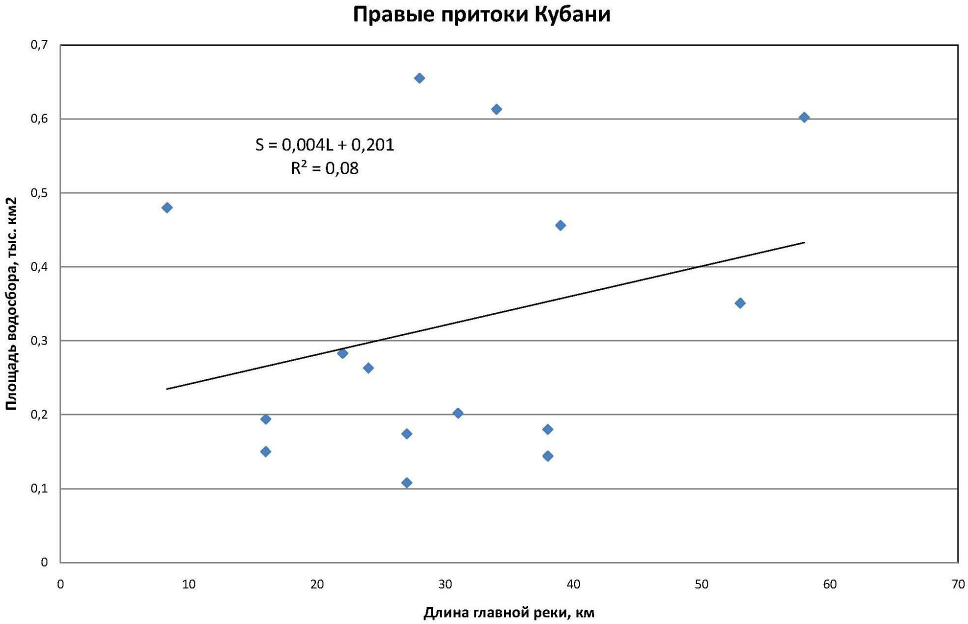


Рис.3. Линейная зависимость $S(L)$.

По тем же рекам на рис. 4, 5 и 6 приведёны примеры такого роста. Теперь всё выглядит достаточно приемлемо с точки зрения физической географии. Появились значения минимальных площадей (S_0) при отсутствии реки ($L = 0$).

Однако качество корреляции принципиально не улучшилось. Известно, что коэффициент детерминации (R^2) показывает удачность выбора функции и степень изменения результирующего признака (у нас S) от факторного параметра (у нас L). Коэффициент же λ (как коэффициент регрессии) показывает, на какую величину в среднем изменяется результирующий признак (S) при изменении факторного признака (L) на единицу (в нашем случае на 1 км).

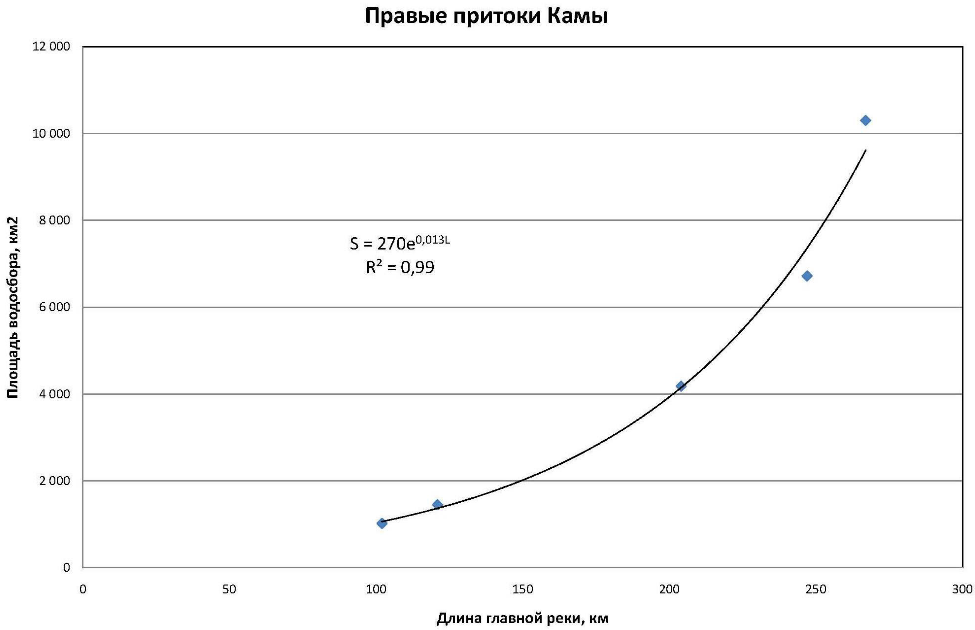


Рис. 4. Экспоненциальная зависимость $S(L)$ для правых притоков бассейна р.Камы.

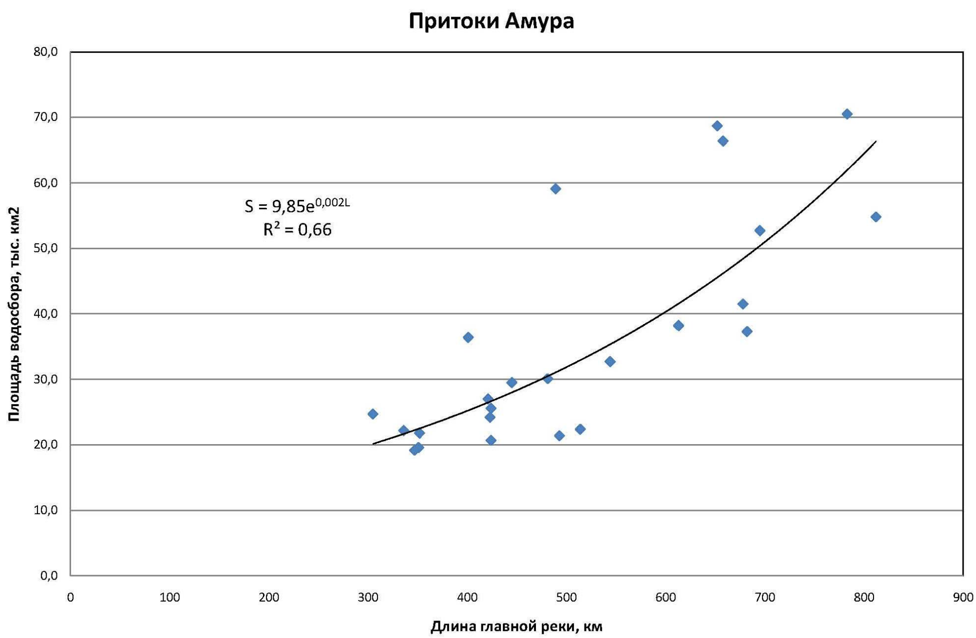


Рис. 5. Экспоненциальная зависимость $S(L)$ дл бассейна р. Амур.

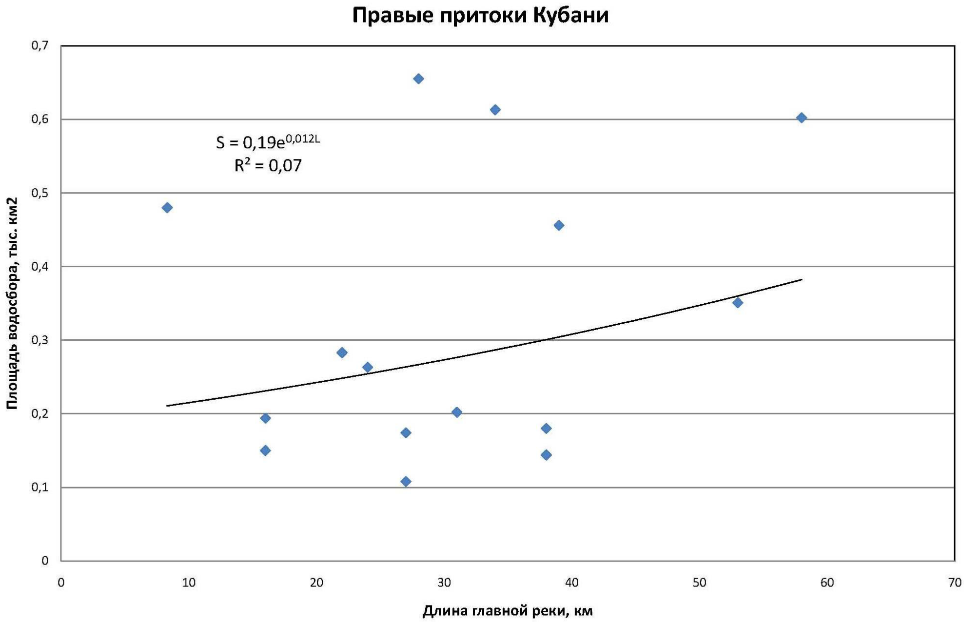


Рис.6. Экспоненциальная зависимость $S(L)$ для правых притоков бассейна р. Кубань.

Численные значения коэффициентов всех зависимостей по рассмотренным рекам приведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры экспоненциальных функций $S = S_0 e^{\lambda L}$ по бассейнам рассмотренных рек и коэффициент корреляции

Реки	Коэффициент детерминации, R^2	Начальная ордината, S_0, км^2	Коэффициент регрессии, λ, км$^{-1}$	Коэффициент линейной регрессии
Крупнейшие реки мира [по 5]	0,45	191 000	0,0004	–
КАМА				
1.Левые притоки	0,77	1500	0,005	0,64
2.Правые притоки	0,99	273	0,013	0,90
3. Все притоки	0,78	1037	0,006	0,70
ДНЕПР				
1.Левые притоки	0,84	2130	0,004	0,72
2.Правые притоки	0,76	1700	0,004	0,84
3. Все притоки	0,78	1834	0,004	0,72
ВОЛГА				
1.Левые притоки	0,86	3600	0,003	0,67
2.Правые притоки	0,62	3900	0,003	0,94
3. Все притоки	0,68	3830	0,003	0,73

Реки	Коэффициент детермина-ции, R^2	Начальная ордината, S_0, км^2	Коэффициент регрессии, λ, км$^{-1}$	Коэффици-ент линейной регрессии
БЕЛАЯ				
1.Левые притоки	0,97	208	0,015	0,99
2.Правые притоки	–	–	–	–
3. Все притоки	0,89	230	0,014	0,50
ОКА				
1.Левые притоки	0,72	1310	0,005	0,81
2.Правые притоки	0,84	1380	0,005	0,86
3. Все притоки	0,73	1420	0,005	0,82
АМУР				
Все притоки	0,66	9850	0,002	0,62
КУБАНЬ				
1.Левые притоки	0,39	356	0,008	0,61
2.Правые притоки	0,07	190	0,012	0,08
3. Все притоки	0,60	237	0,010	0,70
ОБЬ				
1.Левые притоки	0,52	5200	0,002	0,37
2.Правые притоки	0,57	5400	0,002	0,83
3. Все притоки	0,57	5520	0,002	0,67
Реки Черноморского побережья Кавказа (ЧПК) в пределах РФ	0,86	40,8	0,040	–

Рассмотрение табл. 1 даёт повод для построения связи между параметром S_0 и λ (рис.7 показывает степенную зависимость как лучший вариант).

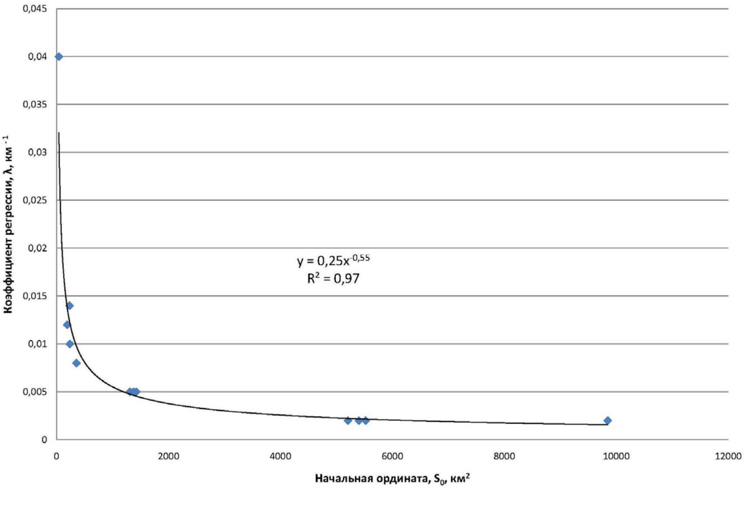


Рис. 7. Степенная зависимость начальной ординаты (S_0) от коэффициента регрессии экспоненты (λ).

Коэффициент детерминации здесь очень хороший ($R^2 = 0,97$). Учитывая малость величин вторых знаков после запятой у коэффициента а перед аргументом x и показателя степени для него, уравнение регрессии можно записать в следующем виде:

$$\lambda = 0,2 \cdot (S_0)^{-0,5}$$

$$\text{или} \quad \lambda \cdot (S_0)^{0,5} = 0,2$$

$$\lambda^2 \cdot S_0 = 0,04$$

Итак, эксплуатируя экспоненциальный закон роста площади бассейна в результате эрозионной работы реки, можно записать простую систему уравнений:

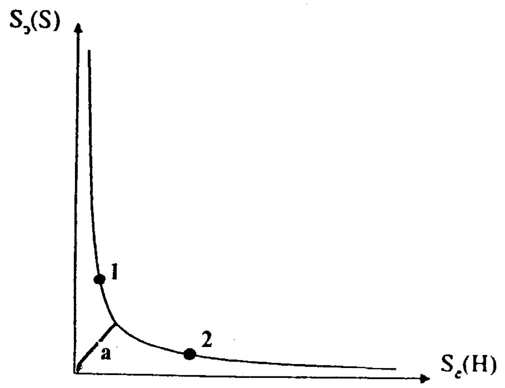
$$S = S_0 e^{\lambda L}, \tag{1}$$

$$S_0 \cdot \lambda^2 = 0,04.$$

Её вполне можно назвать *математическим определением реки*. При этом, если параметры S_0 и λ оцениваются для совокупностей конкретных бассейнов, составляющих притоки конкретной реки, то их степенная связь выглядит общей (пока что на уровне рассмотренных бассейнов). Пожалуй, здесь следует подчеркнуть, что приведённые бассейны были взяты произвольно.

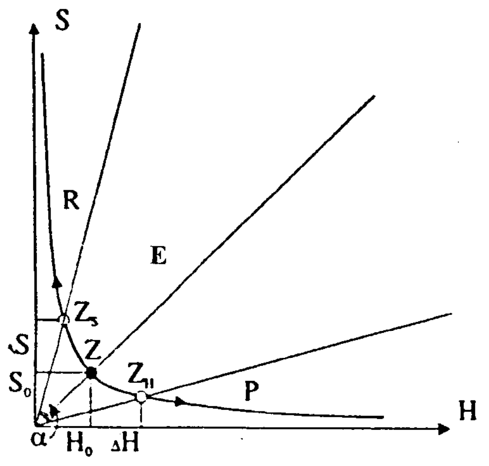
Отметим ещё одно обстоятельство. Последняя формула есть не что иное, как запись равнобочной гиперболы в координатах S_0 и λ^2. Сравнивая её с представлениями Я. Виньковецкого (см. [5]), вполне резонно толкование этих параметров как величин, отражающих соответственно структурную и энергетическую энтропии развития речного бассейна. За энергетическую энтропию (Больцмана) отвечает величина S_0, за структурную энтропию (информацию) отвечает параметр λ^2. Происходит рост площади бассейна стока и одновременная её дезинтеграция (вместе с геологической основой). За их счёт организуется разветвлённая речная сеть. Хаос осадков формируется в некий структурный порядок стока. В соответствии со вторым законом термодинамики природа развивается асимметрично. Если в одном месте из хаоса возникает порядок, то в другом порядка становится на столько же меньше. Общий запас энергии в природе сохраняется, только качество её ухудшается.

Величины S_0 и λ^2 отражают именно такое положение вещей. Через их взаимоотношение мы можем воспринимать структурно-энергетический смысл формирования бассейна реки (рис. 8).



$S_Э$ – энергетическая энтропия Больцмана.
$S_С$ – структурная энтропия (информация по Шеннону).
Точки 1 и 2 – соответственно сопряжённое разделение хаоса и порядка из первоначального состояния, когда они были слиты и в некой точке Z (см. рис. 9).

Рис. 8. Гипербола Я.А. Виньковецкого в интерпретации А. Павлова [5].



R – область регрессивной эволюции;
P – область прогрессивной эволюции;
S_0, H_0 – начальные условия, $Z(S_0, H_0)$;
E – область, возникающая в результате эволюции (здесь речного бассейна);
→ направления сопряженных составляющих эволюции;
α - угол расхождения точки ZERO, после её раздвоения.

Рис.9. Схема распределения хаоса и порядка (раздвоение точки Z – ZERO)

Между полями прогрессивной составляющей эволюции (P) и регрессивной (R) появляется новое поле (E), которого не было в начальном состоянии ZERO или которое, скорей всего, в это начальное состояние входило. Что же это за поле? Этот феномен в развитии речного бассейна предстоит ещё исследовать.

У. Грегори [5] есть интересная и продуктивная мысль: «Мы не только верим тому, что видим, но до некоторой степени и видим то, во что верим».

Рассматривая экспоненциальные зависимости $S(L)$, легко увидеть, что точки в правой части графиков не только более рассеяны на поле рисунка, но и несколько смещены к низу. Объяснение этому явлению может быть довольно простым и естественным с физико-географической точки зрения. Бассейн стока не только начинается с некоторой минимальной площади S_0, но должен иметь и верхний предел, некую асимптоту S_{max}. Площадь бассейна не может быть бесконечно большой, на что нацеливает экспоненциальная функция. И здесь логично обратиться к логистической функции. Используя дифференциальное уравнение И. Пригожина для описания роста популяций [9], можно получить полезное для нас решение:

$$\frac{dS}{dL} = rS\left(1 - \frac{S}{K}\right), \tag{1}$$

где параметр r характеризует скорость роста (аналог коэффициента регрессии в экспоненте), а K – емкость среды (т.е. максимально возможную площадь – в нашем случае S_{max}).

Получаем точное решение (логистическую функцию)

$$S(L) = \frac{KS_0e^{rL}}{K + S_0\left(e^{rL} - 1\right)}, \tag{2}$$

где $S_о$ – начальная площадь.

Результаты вычислений по некоторым рекам, уже использованным нами для иллюстрации поисков, приведены в табл. 2.

Таблица 2

Параметры логистической функции

№№	Река	S_0	K	r
1	Амур	18 000	71 000	0,0025
2	Обь	2000	135 000	0,006
3	Волга	2000	70 000	0,007
4	Ока	2000	20 000	0,008
5	Днепр	1000	43 000	0,008
6	Кама	1000	35 000	0,009
7	Белая	300	12 000	0,018
8	Кубань	100	3500	0,024

Визуальное представление логистических связей по ним дают рис.10, 11,12.

Точки в виде квадратиков являются расчётными по реальным значениям параметров и фиксируют логистические кривые для бассейнов приведённых рек. В табл.2 параметр K, по своей сути, обозначает положение верхней асимптоты, показывающий ограничение развития площади речного бассейна (предельный её максимум). Между начальной асимптотой (S_0) и коэффициентом r (скорость роста бассейна) просматривается хорошая степенная связь, аналогичная той, что наблюдалась при экспоненциальной зависимости (см. рис. 7 и 13).

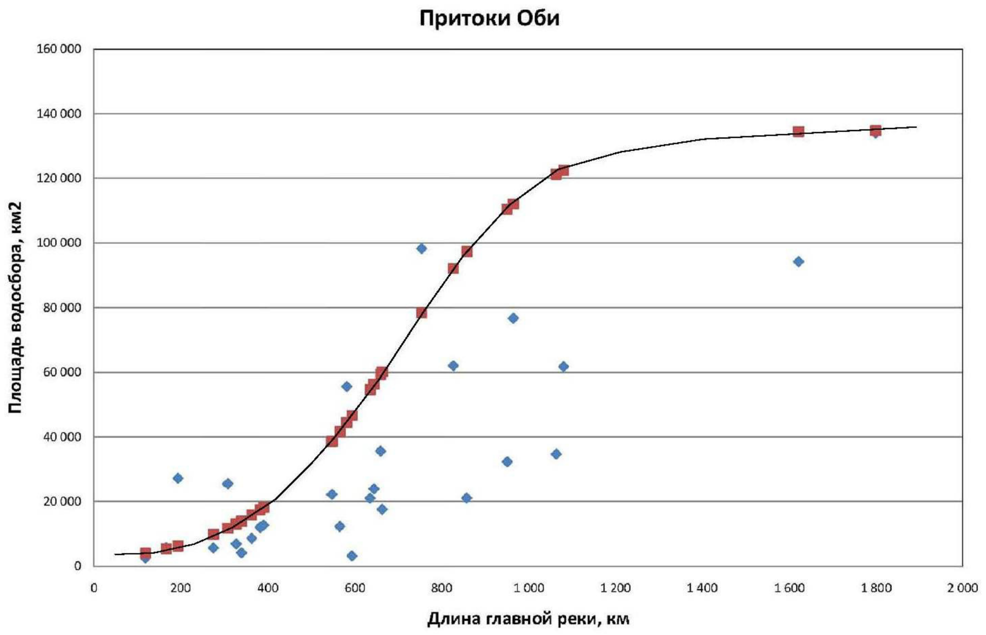


Рис. 10. Бассейн Оби

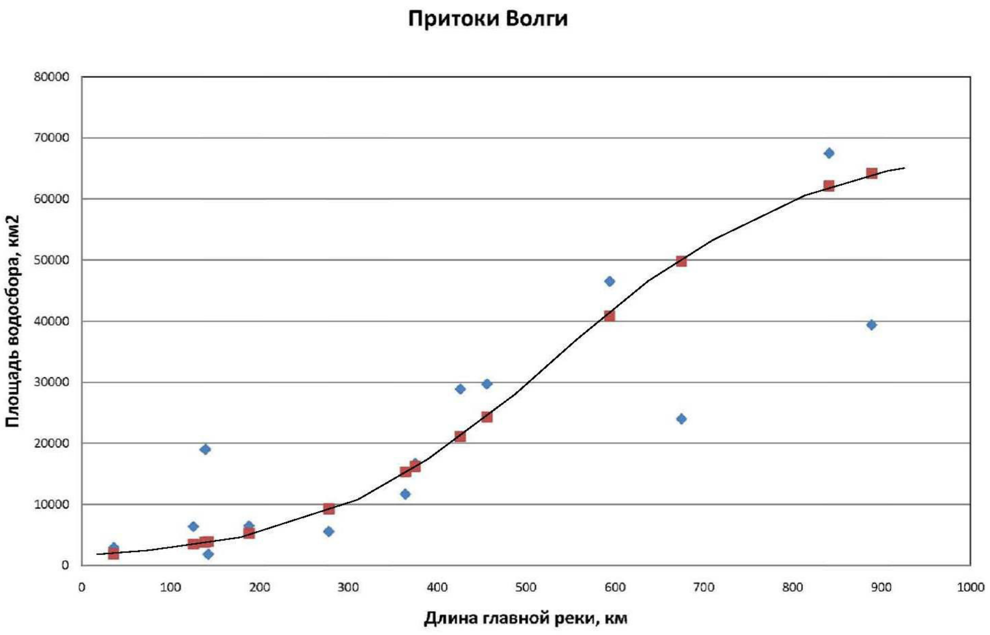


Рис. 11. Бассейн Волги.

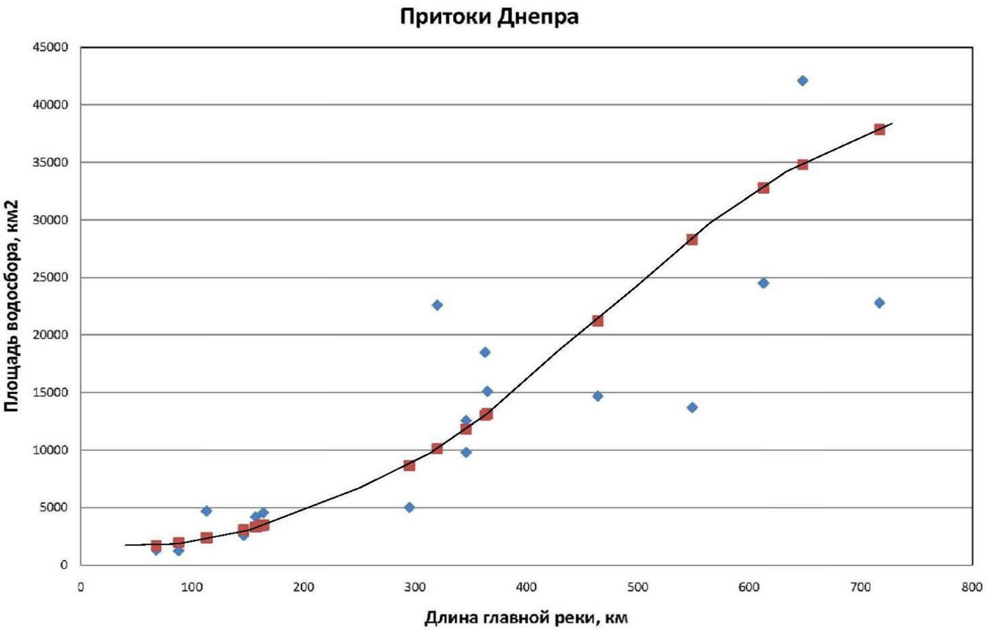


Рис. 12. Бассейн Днепра.

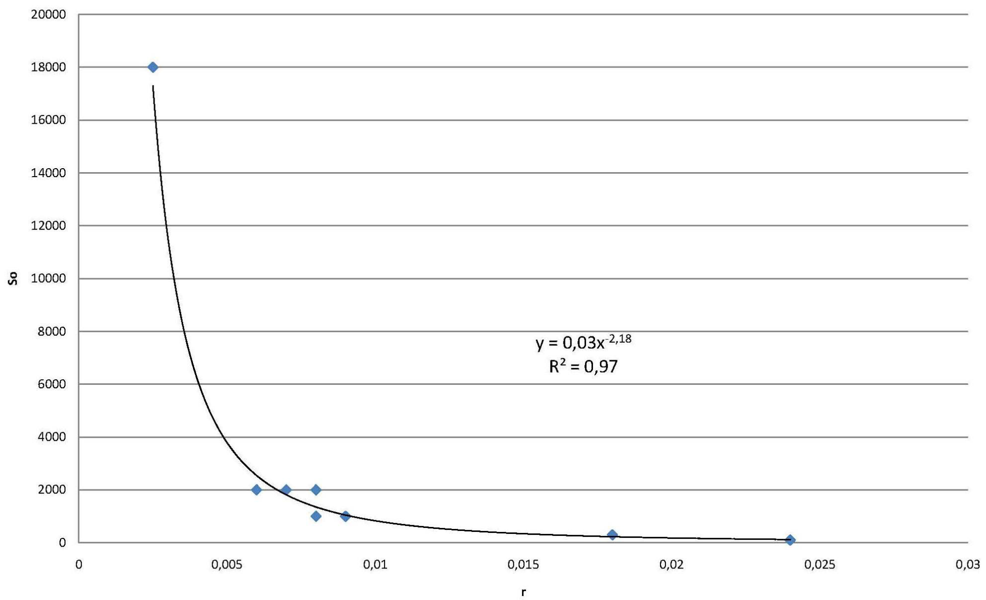


Рис. 13. Степенная зависимость начальной ординаты (S_0) от коэффициента r (скорость роста бассейна).

Простое преобразование уравнения этой зависимости позволяет увидеть её превращение в равнобочную гиперболу по рис. 7:

$$S_0 = 0,034 \cdot r^{-2,18},$$

$$S_0 \cdot r^2 = 0,03.$$

Заметим, что коэффициент детерминации R^2 здесь тоже высокий (0,973).

Смысл полученной гиперболы, так же как и ранее, приводит к пониманию кривой А. Виньковецкого с дополнениями А. Павлова (см. рис. 8 и 9). Скорость роста r следует воспринимать как показатель роста структурной энтропии (создание речной сети). Речные струи разрушают геологическую основу и площадь бассейна (дезинтегрируют их). При этом в силу структурно-энергетического единства природы такая дезинтеграция приводит к сопряжённому росту новых структур – формированию речной сети. Площадь же водосбора становится менее информативной (теряет свои информативные возможности), а энергетические возможности двигающейся воды по отношению к площади увеличиваются (расширяются).

Таким образом, система уравнений (1) вполне корреспондирует с более реальной системой (2), которая опирается на логистические представления развития речного бассейна

$$S(L) = \frac{KS_0 e^{rL}}{K + S_0\left(e^{rL} - 1\right)}, \qquad (2)$$

$$r^2 \cdot S_0 = 0,03.$$

Система уравнений (2) принимается за математическое описание реки. Её словесное выражение можно записать в следующем виде:

1. *Базовыми интегральными характеристиками реки являются её длина (L) и площадь водосбора (S).*
2. *При существующем базисе эрозии ёмкостная величина речного бассейна (K) определяется двумя асимптотами:*
   - *минимальной площадью, создающей предпосылки для развития реки (S_0);*
   - *максимальной площадью, заданной геологическими процессами (S_{max}), и ограничивающий возможности роста.*
3. *Расширение площади водосбора контролируется скоростью роста длины реки (r).*
4. *Скорость роста (скорость организации речной сети) r для данной реки является постоянной при сохранении базиса эрозии речного бассейна, который может быть выражен через минимальную площадь (S_0).*

Эти слова, на наш взгляд, вполне эквивалентны полученным уравнениям.

Дальнейшая работа в рассмотренном направлении видится в составлении каталога из таблиц логистических параметров (см. табл.2) и графиков $S(L)$ для региональной мировой системы. При этом следует двигаться от мелких масштабов к более крупным: от великих рек мира к речным системам регионов и далее в сторону детализации.

Образцом здесь может служить опыт геологического картирования территории

СССР. Вначале масштаб 1: 7 500 000; затем 1: 5 000 000; 1: 1 000 000; 1: 500 000 и далее к масштабам более крупным, но, в основном, по отдельным регионам.

Полученная в этой работе система уравнений для речного бассейна будет, разумеется, совершенствоваться и детализироваться, обрастая статистическими характеристиками, а также временными датировками по возрасту бассейнов и их геологической истории.

В качестве теоретической базы предполагается использовать разработки И. Пригожина [9 и др.]

В заключение отметим, что когда эта статья была закончена, авторы неожиданно для себя натолкнулись на реферат книги В.Р. Кирейтова и А.Г. Назина [3], которая посвящена вопросам математического исследования геоморфометрических понятий и величин с целью обеспечения возможности эффективного привлечения к этим исследованиям современных компьютерных технологий. Видимо, стремление к математической формализации основных понятий физико-географического толка становится фактом современной науки. А поскольку геоморфометрия прямым и обратным образом связана с деятельностью поверхностных вод и, в частности, с формированием речных систем, то поставленные в этой статье вопросы приобретают особую актуальность.

Наверное, будет уместным закончить статью замечанием, что теория Максвелла представляет собой систему уравнений Максвелла. Кажется, оно принадлежит Р. Фейнману. Гидрологам следует рискнуть повторить такие построения для речных систем.

Литература

1. *Барков А.С.* Словарь-справочник по физической географии. – М.: Учпедгиз, 1948. – 304 с.
2. Геологический словарь. Т.2. – М.: Недра, 1973. – 456 с.
3. *Кирейтов В.Р.,Назин А.Г.* Математические основы геоморфометрии. – Новосибирск, 2010. –392 с.
4. *Ожегов С.И. и Шведова Н.Ю.* Толковый словарь русского языка. – М.: Азбуковник, 1999, 2000. – 944 с.
5. *Павлов А.Н.* Основы экологической культуры. – СПб.: Политехника, 2004. – 334 с.
6. *Павлов А.Н.* Представление об информационных циклах. // Ученые записки РГГМУ, № 1. СПб, РГГМУ, 2005, с. 189-198.
7. *Павлов А.Н.* Модуль площадной нагрузки рек – новый параметр речных бассейнов. // Ученые записки РГГМУ, № 19. СПб, РГГМУ, 2011, с. 21-36.
8. *Павлов А.Н., Голосовская В.А., Саноцкая Н.А.* Симметрия и асимметрия речных бассейнов. Обсуждение задачи. // Ученые записки РГГМУ, № 18. СПб, РГГМУ, 2011, с. 21-34.
9. *Пригожин И.* От существующего к возникающему. – М.: Наука, 1985. – 327 с.
10. *Чеботарёв А.И.* Гидрологический словарь. Изд. 3 перераб. и дополн. – Гидрометеоиздат, 1978. – 308 с.