Н.В.Дьяченко

ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ НАКЛОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

N.V.Djachenko

WAVE MOTIONS OF THE RAKING SURFACE OF THE FLUID

В работе решена задача о распространении гравитационных волн вдоль наклонной поверхности жидкости, образующейся под амфибийным судном на воздушной подушке. Показано, что амплитуда волн экспоненциально возрастает во времени и с вертикальной координатой, что приводит к разрушению волн и образованию облака брызг.

Ключевые слова: наклонная поверхность жидкости, колебания давления, потенциальное движение, решение уравнения Лапласа, профиль волны.

The problem about extending of gravity waves along a raking surface of the fluid formed under an amphibious air-cushion vehicle is in-process solved. It is shown that the amplitude of waves exponentially increases in a time and with vertical co-ordinate that leads to a wave breaking and formation of a cloud of splashes.

Keywords: a raking surface of a fluid, pressure oscillations, potential traffic, the solution of the equation of the Laplace, a wave contour.

Вопросу образования волн на горизонтальной поверхности моря посвящено большое количество научных работ [2] и др. В настоящее время считается, что первоначально волны на гладкой поверхности моря возникают вследствие турбулентных пульсаций поля скоростей и давлений в массе воздуха, перемещающейся относительно поверхности воды, т.е. под воздействием ветра. Возникшие волны создают дополнительные помехи движению воздуха, усиливают пульсации поля давлений воздуха, а это вновь приводит к увеличению высот волн. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не установится динамическое равновесие. Высота волн четко связана определенной корреляционной зависимостью со скоростью ветра над поверхностью моря [3].

В настоящей работе рассматривается математическая модель волнового движения на наклонной к горизонту поверхности воды. Такая поверхность образуется под амфибийным судном на воздушной подушке (АСВП), парящим над уровнем моря, за счет избыточного давления, создаваемого воздушными нагнетателями, и представляет собой впадину с горизонтальным дном и наклонными краями, рис.1.

При решении граничной задачи математической физики о волнах на поверхности жидкости в первую очередь необходимо решить вопрос о величине давления воздуха над этой поверхностью. В рассматриваемом здесь случае есть основания полагать, что волны на склоне впадины воздушной подушки (ВП) возникают вследствие пульсаций поля скоростей и давлений в струе воздуха, истекающей из ВП, причем кроме случайных турбулентных пульсаций поля скоростей и давлений, влияние которых учесть весьма трудно, могут быть и причинно-определенные пульсации, вызванные, например, качкой судна, вибрацией гибкого ограждения (ГО), или связанные с лопастной частотой нагнетателя, подающего воздух в ВП. Влияние этих возмущений на образование волн учесть легче. В данной работе исследована схема, описывающая колебания сложной системы, включающей колебания поверхности склона впадины вместе с колебаниями поля скоростей и давлений в струе воздуха над поверхностью склона.

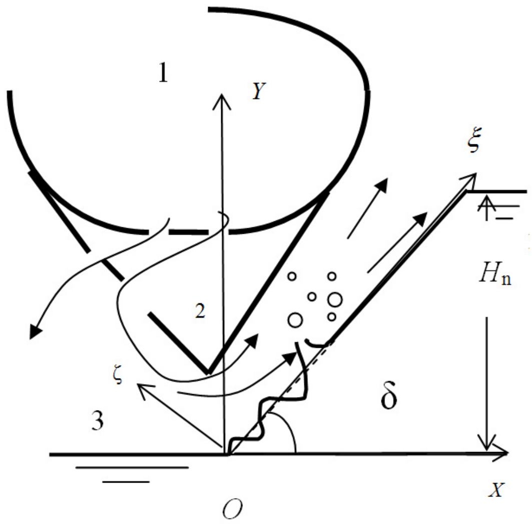

Рис.1. Схема истечения воздуха вдоль склона впадины ВП: 1 – ресивер; 2 – навесной элемент гибкого ограждения ВП; 3 – область ВП; H_n – глубина впадины ВП; δ – угол наклона поверхности к горизонту.

Рассмотрим поверхность воды, образованную плоским дном и склоном впадины ВП при переходе от области ВП к невозмущенному уровню поверхности моря. Начало прямоугольной системы координат поместим в точку, где горизонтальная поверхность дна впадины переходит в наклонную к горизонту поверхность склона впадины. Ось OX совпадает с горизонтальной поверхностью дна, ось OY направлена вертикально вверх. В [1] показано, что величина избыточного давления воздуха вдоль склона впадины изменяется по гидростатическому закону

$$P = P_n - \gamma y \qquad (1)$$

где P_n – давление в области ВП.

Такое распределение давления обеспечивает равновесие невозмущенной плоской поверхности склона y_c. Считается, что колебания жидкости происходят относительно этой поверхности $y_c = x\,\mathrm{tg}\,\delta$, где δ – угол между поверхностью склона впадины и горизонтальным дном. Таким образом, форма равновесной поверхности склона известна и она не зависит от времени. *S(x,t)* – свободная поверхность склона впадины в положении, отклоненном от равновесного в процессе колебаний; ζ(x,t) – вертикальное отклонение точки склона впадины ВП от равновесного положения.$y_{c.}$

Очевидно, что уравнение свободной поверхности жидкости на склоне впадины можно представить в виде

$$S(x,t)=\zeta(x,t)+y_c(x) \tag{2}$$

Движение жидкости считаем потенциальным. Потенциал скоростей ϕ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{3}$$

Составляющие вызванных скоростей равны

$$U=-\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad V=-\frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{4}$$

Полная производная по времени функции *S(x,t)*

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial y_c}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial y_c}{\partial t}+\frac{\partial\zeta}{\partial t}$$

Вычислив все производные и учитывая малость колебаний, получим

$$\frac{dS}{dt}=-tg\delta\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\zeta}{\partial t} \tag{5}$$

Величина вертикальной составляющей скорости точки склона впадины ВП

$$\frac{dS}{dt}=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

Следовательно, кинематическое условие на свободной поверхности имеет вид:

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-tg\delta\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\zeta}{\partial t} \quad \text{при} \quad y=y_c \tag{6}$$

При невозмущенной поверхности склона впадины давление и скорость в струе воздуха связаны уравнением Бернулли

$$P_p+\gamma y-\frac{\rho V_m^2}{2}=P_n=const \tag{7}$$

где V_m – скорость воздуха в точке струи с координатами (x,y), а P_p – величина давления в ресивере судна.

Местная толщина струи $s_m(x,y)$ при постоянной величине расхода воздуха Q_l равна

$$s_m=\frac{Q_l}{V_m} \tag{8}$$

При наличии на поверхности склона впадины волн с ординатами *ζ(x,y)* толщина струи увеличивается или уменьшается в зависимости от знака величины ζ

$$s = s_m - \zeta\cos\delta \tag{9}$$

Величина местного значения скорости воздуха с учетом волнового движения подстилающей поверхности и малости колебаний ($\zeta/s_m << 1$)

$$V = V_m\left(1 + \frac{\zeta\cos\delta}{s_m}\right) \tag{10}$$

С учетом сделанных преобразований величина давления в струе определяется

$$P = P_p - \frac{\rho V_m^2}{2}\left(1 + \frac{2\zeta\cos\delta}{s_m}\right) \tag{11}$$

Подставив выражение (2.16) в уравнение Коши – Лагранжа, получим

$$\frac{P_p + \gamma y - \frac{\rho V_m^2}{2}}{\rho_w} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - g\zeta + \left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)V_m^2\left(\frac{\zeta}{s_m}\right)\cos\delta + F(t) \tag{12}$$

Левая часть равенства (12) является константой, т.к. числитель дроби равен P_p. Введем константу под знак потенциала ϕ и опустим произвольную функцию *F(t),* что не отразится на величинах вызванных скоростей. Тогда:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = g\zeta\left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)\frac{V_m^2\cos\delta}{g s_m}\right] \tag{13}$$

Обозначим величину в квадратной скобке *q(x)*. В общем случае *q(x)* не равно единице. Эта величина зависит от положения точки (*x,y*) на склоне впадины ВП. В районе истечения струи из-под нижней кромки навесного элемента ГО толщина струи s_m максимальна, а на выходе струи в атмосферу - минимальна. В первом случае, как показывают расчеты, величина *q(x)* очень близка к единице, во втором случае эта величина становится отрицательной. Физический смысл неравенства $q(x)<0$ означает, что силы аэродинамического разрежения в струе воздуха превышают силы тяжести воды. В этом случае поверхность жидкости может разрушаться, от нее начнут отрываться капли воды, если этому не смогут препятствовать силы поверхностного натяжения на границе воздух – вода. Рассматривать волновое движение жидкости на поверхности впадины ВП в этом случае становится не целесообразным. Поэтому дальнейшее рассмотрение задачи будет относиться только к участкам струи, на которых выполняется условие $q(x)>0$.

Динамическое граничное условие на свободной поверхности теперь записывается в виде:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = g\zeta q(x) \tag{14}$$

Кинематическое граничное условие на свободной поверхности воды имеет вид

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}tg\delta + \frac{\partial\zeta}{\partial t} \tag{15}$$

Исключив величину ζ из (14) и (15), получим новое общее граничное условие на границе для определения величины потенциала ϕ *(x,y,t)*

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - gq(x)tg\delta\frac{\partial\varphi}{\partial x} + gq(x)\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \qquad (16)$$

Граничное условие на глубине,

$$\varphi \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty \qquad (17)$$

Решение уравнения Лапласа удовлетворяющее граничным условиям на бесконечной глубине, может быть получено методом Фурье разделения переменных, [3]:

$$\varphi = \ell^{ky}\left[a(t)\cos(kx) + b(t)\sin(kx)\right] \qquad (18)$$

где *a(t)* и *b(t)* неизвестные функции времени.

Для определения этих функций решение (18) подставим в граничное условие (16) и приравняем значения коэффициентов при функциях синуса и косинуса в левой и правой частях уравнения. Получим систему двух дифференциальных уравнений для определения этих функций. Решения ее

$$a(t) = C_1\ell^{\sigma t}\sin(\omega t + \varepsilon_1) + C_2\ell^{-\sigma t}\sin(\omega t + \varepsilon_2)$$

$$b(t) = C_1\ell^{\sigma t}\cos(\omega t + \varepsilon_1) + C_2\ell^{-\sigma t}\cos(\omega t + \varepsilon_2) \qquad (19)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{gq(x)k}{\cos\delta}}\sin\frac{\delta}{2} \qquad \omega = \sqrt{\frac{gq(x)k}{\cos\delta}}\cos\frac{\delta}{2}$$

где C_1, C_2, ε_1, ε_2 – произвольные постоянные.

Подставим выражения (19) в решение уравнения Лапласа (18) и, выполнив приведение подобных членов, получим:

$$\varphi(x,y,t) = C_1\ell^{(ky+\sigma t)}\sin(kx - \omega t) + C_2\ell^{(ky-\sigma t)}\sin(kx + \omega t) \qquad (20)$$

Второе слагаемое в формуле (20) содержит в показателе экспоненты слагаемое *(-σt)* ,следовательно, оно соответствует движению жидкости, которое быстро затухает со временем. Мы опустим это решение из рассмотрения и ограничимся первым слагаемым в формуле. Продифференцируем по времени функцию ϕ*(x,y,t)* и подставим в формулу (14), положив *y=x tg*δ. Это даст профиль свободной поверхности жидкости на склоне впадины ВП

$$\zeta(x,t) = C_1\sqrt{\frac{k}{gq(x)\cos\delta}}\ell^{(kxtg\delta+\sigma t)}\cos\left(kx - \omega t + \frac{\delta}{2}\right) \qquad (21)$$

Полученное решение характеризуется двумя особенностями.

- Во-первых, в амплитуде волны присутствует множитель $1/\sqrt{q(x)}$, который превышает единицу и значительно увеличивает амплитуду волны. Кроме того, он зависит от координаты *x,* поэтому величина амплитуды по мере приближения к критическому значению координаты y_k возрастает до бесконечности.

- Во-вторых, константы σ и ω в полученном решении пропорциональны величине $\sqrt{q(x)}$. Следовательно, частота волны уменьшается по мере приближения к критическому значению координаты y_k до нулевого значения. Движение жидкости на поверхности впадины ВП теряет характер волнового движения и переходит в асимптотическое. Можно считать, что здесь начинается разрушение сплошной поверхности жидкости и образование брызг. Результаты расчета формы профиля склона впадины ВП по формуле (21) приведены на Рис. 2. Для удобства анализа по оси ординат отложены значения отношения $\zeta^* = \zeta / H_n$ а по оси абсцисс – относительная координата склона $y^* = y / H_n$

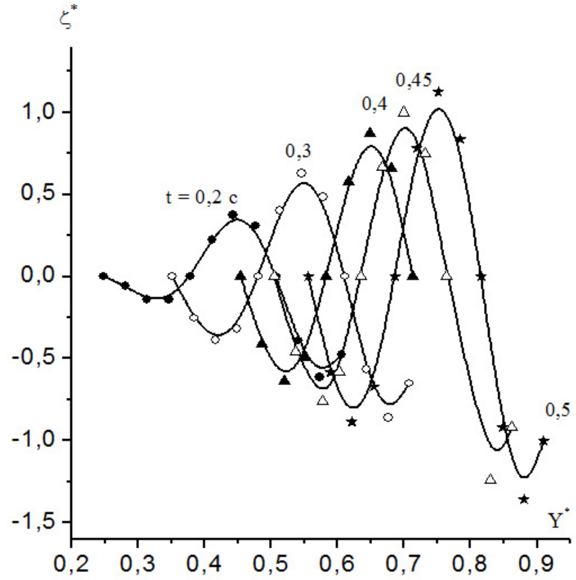

Рис.2. Зависимость относительных ординат профиля волн ζ* от относительной коорди-наты y* точки на склоне впадины ВП для различных моментов времени.

Можно видеть как с увеличением времени растут амплитуда и длина волны, а частота волны уменьшается. Рамки линейной теории волн малой высоты не позволяют судить о том, с какого момента амплитуда волны возрастает настолько, что начинается разрушение сплошной поверхности жидкости, однако о положении точки начала разрушения поверхности можно судить по величине коэффициента *q(x)* как было отмечено выше.

Литература

1. *Аносов В.Н.* Исследование процесса брызгообразования и разработка брызгозащитных средств судов на воздушной подушке: Дис....канд.техн.наук.-СПб, 1992.-123 С.
2. *Воробьев В.Н., Смирнов Н.П.* Общая океанология. Часть 2. Динамические процессы.-СПб.: изд. РГГМУ, 1999.-230 С.
3. Динамика океана/Под ред.Ю.П.Доронина.-Л.:Гидрометеоиздат, 1980.-303 С.