Н.В.Дьяченко

ГРАВИТАЦИОННО-КАПИЛЛЯРНЫЕ ВОЛНЫ НА НАКЛОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

N.V.Djachenko

GRAVITY-CAPILLARY WAVES ON THE RAKING SURFACE OF THE FLUID

В статье решена граничная задача математической физики о распространении гравитационно-капиллярных волн по наклонной к горизонту поверхности жидкости. Показано, что амплитуда гравитационно-капиллярных волн линейно возрастает со временем, что ведет к их разрушению.

Ключевые слова: наклонная поверхность жидкости, силы поверхностного натяжения, потенциальное движение, граничные условия, решение уравнения Лапласа, профиль волны.

In paper the mathematical physics boundary problem about extending of gravity-capillary waves on raking to horizon of a surface of a fluid is solved. It is shown that the amplitude of gravity-capillary waves linearly increases in due course that conducts to their breaking down.

Key words: a raking surface of a fluid, a surface tension force, potential traffic, boundary conditions, the solution of the equation of the Laplace, a wave contour.

Наклонная поверхность жидкости образуется под амфибийным судном на воздушной подушке (АСВП), парящим над уровнем моря, за счет избыточного давления, создаваемого воздушными нагнетателями, и представляет собой впадину с горизонтальным дном и наклонными краями (рис.1). В [1] показано, что вдоль склона впадины по направлению к невозмущенной поверхности моря распространяются волны. Разрушение этих волн приводит к образованию облака брызг, окутывающего АСВП и затрудняющего его эксплуатацию. Для определения объемов воды, выбрасываемых в атмосферу, необходимо знать характер роста волнового движения вдоль склона впадины. Ранее было рассмотрено влияние гравитационных сил на форму профиля волны, бегущей вдоль склона впадины. В настоящей работе помимо гравитационных сил учтено также и влияние сил поверхностного натяжения на профиль волнового движения.

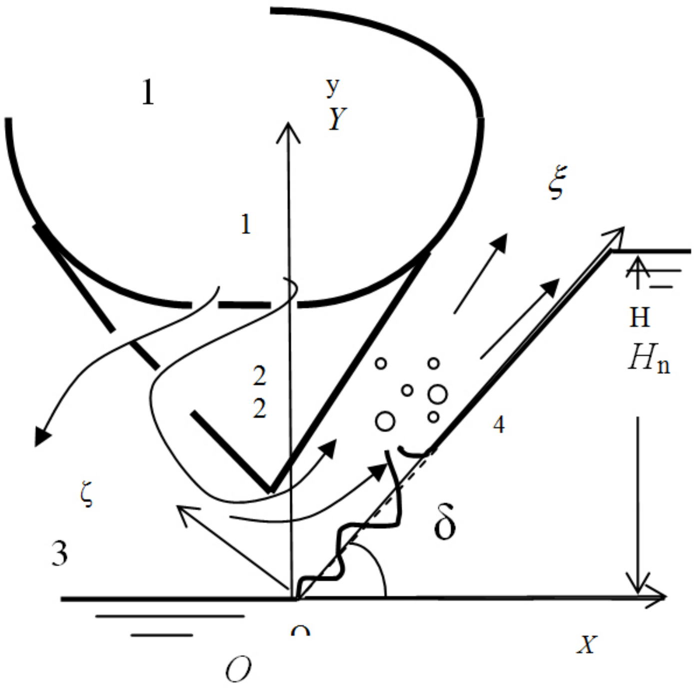

Рис.1. Схема истечения воздуха вдоль склона впадины ВП: *1* – ресивер; *2* – навесной элемент гибкого ограждения ВП; *3* – область ВП; H_n – глубина впадины ВП; δ – угол наклона поверхности к горизонту.

При решении задачи о капиллярных волнах будем исходить из предположения о том, что эти волны малы и не вызывают пульсации давления в струе воздуха над склоном впадины воздушной подушки (ВП). Но вместе с этим учтем дополнительное давление на поверхность жидкости, создаваемое силами поверхностного натяжения, пропорциональными местной кривизне поверхности и величине коэффициента сил поверхностного натяжения σ на границе сред вода – воздух [2]. В этом случае динамическое граничное условие на склоне впадины воздушной подушки принимает вид:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = g\varsigma - \frac{\sigma}{\rho_w}\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x^2}. \qquad (1)$$

Кинематическое граничное условие выглядит как

$$-\frac{\partial \phi}{\partial y} = -tg\delta\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \varsigma}{\partial t}. \qquad (2)$$

Эти граничные условия выполняются при $y = y_c = x$ tgδ. Будем искать решение уравнения Лапласа φ*(x,y,t)* в области Ω, расположенной ниже уровня склона впадины ВП (рис.1), [3], удовлетворяющее граничным условиям (1) и (2) и дополнительному условию на глубине φ*(x,y,t)* → ∞ при y → - ∞.

Простейшее решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее условию на глубине, имеет вид:

$$\phi(x,y,t) = B(t)\, e^{ky} \cos(kx). \tag{3}$$

Выпишем производные потенциала, входящие в кинематическое граничное условие:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = k\, B(t)\, e^{ky} \cos(kx),$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -k\ B(t)\, e^{ky} \sin(kx)$$

и подставим эти производные в (2):

$$\frac{\partial\varsigma}{\partial t} = -k\, B(t)\, e^{ky} \cos(kx) + k\, B(t) tg\delta\, e^{ky} \sin(kx). \tag{4}$$

Введем в рассмотрение первообразную функцию $A(t) = \int B(t)dt$ и положим $A(t) = 0$ при $t = 0$. Выполним интегрирование по времени обеих частей равенства (4)

$$\varsigma = -k\, A(t) e^{ky}\ \cos(kx) + k\, A(t)\ tg\delta e^{ky} \sin(kx) + F(x,y). \tag{5}$$

Положим $\zeta = 0$ при $t = 0$. Тогда $F(x,y) = 0$

$$\varsigma = A(t) k\, e^{ky} \left[-\cos(kx) + tg\delta \sin(kx)\right]. \tag{6}$$

Выполнив дифференцирование (6) и (3), получим:

$$\frac{\partial^2\varsigma}{\partial x^2} = A(t) k^3 e^{ky} \left[\cos(ky) - tg\delta \sin(kx)\right], \tag{7}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{dB}{dt} e^{ky} \cos(kx) = A''(t) e^{ky} \cos(kx). \tag{8}$$

Подставим производные в динамическое граничное условие, сократим обе части равенства на e^{ky} и сделаем приведение подобных членов:

$$\left[A'' + A(t)\left(gk + k^3 \frac{\sigma}{\rho_w}\right)\right]\cos(kx) = \left[A(t) tg\delta\left(gk + k^3 \frac{\sigma}{\rho_w}\right)\right]\sin(kx). \tag{9}$$

Для того чтобы равенство (9) выполнялось при любых значениях *kx,* необходимо приравнять нулю каждую из скобок перед тригонометрическими функциями:

$$\begin{gathered} A'' + A(t)\left(gk + k^3 \frac{\sigma}{\rho_w}\right) = 0, \\ A(t) tg\delta\left(gk + k^3 \frac{\sigma}{\rho_w}\right) = 0 \end{gathered} \tag{10}$$

Если tgδ = 0, то второе уравнение выполняется всегда, и мы получим решение:

$$A(t) = \cos(\omega t), \quad \omega^2 = gk + k^3 \frac{\sigma}{\rho_w},$$

$$\phi(x, y, t) = C\, e^{ky} \cos(kx) \cos(\omega t).$$

Это решение соответствует гравитационно-капиллярным волнам, распространяющимся по горизонтальной поверхности жидкости. Но в нашем исследовании нас интересует движение по наклонной поверхности при $tg\delta \neq 0$. $A(t) = 0$ соответствует не представляющему интереса тривиальному нулевому решению. Следовательно, остается возможным

$$gk + k^3 \frac{\sigma}{\rho_w} = 0. \tag{11}$$

В этом случае $A''(t) = 0$, следовательно

$$A'(t) = B(t) = \text{const} = C \quad \text{и} \quad A(t) = Ct.$$

Выражение для описания потенциала принимает вид:

$$\phi = C\, e^{ky} \cos(kx).$$

Форма профиля склона впадины воздушной подушки:

$$\varsigma = Ct\, e^{kx\,tg\delta}\, k\left[-\cos(kx) + tg\delta \sin(kx)\right]. \tag{12}$$

Из условия (11) следует

$$k = \pm in, \tag{13}$$

где $n = \sqrt{\dfrac{g\rho_w}{\sigma}}$.

Заменим экспоненту с чисто мнимым показателем комплексным числом по формуле Эйлера, а тригонометрические функции с чисто мнимым аргументом гиперболическими функциями. В результате получим два решения:

$$\varsigma_1 = Cnt \sin\left(nx\,tg\delta\right) ch(nx)\left[1 - tg\delta\, th(nx)\right] - iCnt \sin\left(nx\,tg\delta\right) ch(nx)\left[1 - tg\delta\, th(nx)\right],$$

$$\varsigma_2 = Cnt \sin\left(nx\,tg\delta\right) ch(nx)\left[1 + tg\delta\, th(nx)\right] + iCnt \cos\left(nx\,tg\delta\right) ch(nx)\left[1 + tg\delta\, th(nx)\right].$$

Поскольку система дифференциальных уравнений [граничные условия (1) и (2)] является линейной, любая линейная комбинация решений ζ_1 и ζ_2 также будет являться решением этой системы. Умножив решение ζ_1 на [1 + tgδ $th(nx)$], а решение ζ_2 на [1 – tgδ $th(nx)$], получим два комплексно сопряженных решения, сумма которых даст вещественное решение задачи:

$$\varsigma = 2Cnt\,\sin\left(nx\,tg\delta\right)ch\,(nx)\left[1 - tg(2\delta)\,th(2nx)\right]. \tag{14}$$

Полученное решение в любой фиксированный момент времени представляет собой синусоиду аргумента nxtgδ, амплитуда которой увеличивается с ростом координаты x, т.е. по мере приближения к свободной поверхности моря за пределами воздушной подушки. В любой точке склона впадины ординаты профиля склона линейно возрастают со временем.

Длина волны λ определяется из условия $n$tgδ = 2π/λ т.е. длина волны равна λ = 2π/ $n$tgδ. Величина n близка к 370

$$\left(n = \sqrt{\frac{10 \cdot 1000}{0{,}074}} \approx 370\right).$$

Следовательно, λ = 0,01698 / tgδ.

С увеличением угла δ длина волны уменьшается, волны становятся короче и круче. Зависимость ординат профиля волны от времени свидетельствует о том, что капиллярные волны, так же как и чисто гравитационные волны, быстро возрастают и под действием давления со стороны набегающего потока струи воздуха должны деформироваться и со временем разрушаться.

Литература

1. *Аносов В.Н.* Исследование процесса брызгообразования и разработка брызгозащитных средств судов на воздушной подушке: Дис. на соискание учен. степени канд. техн. наук. – СПб., 1992. – 123 с.
2. Динамика океана / Под ред.Ю.П.Доронина.-Л.:Гидрометеоиздат, 1980. – 303 с.
3. *Дьяченко Н.В.* Волновые движения наклонной поверхности жидкости // Уч. зап. РГГМУ, 2012, № 23, с. 35-40.