С.Д. Винников, Ю.В. Шарина

РАСЧЕТ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ПОТОКА ВОДЫ В РЕКЕ

S.D. Vinnikov, Y.V. Sharina

CALCULATION OF THE UNSTEADY FLOW OF WATER IN THE RIVER

Уточняется запись гидродинамического уравнения системы Сен-Венана. Выполняется пример расчета одномерного неустановившегося движения потока воды в канале с использованием уточненного уравнения.

Ключевые слова: неустановившийся поток, уравнения Сен-Венана, расчёт неустановившегося потока.

The record of Saint-Venant's hydrodynamical equation is specified here. An improved equation is used for an example of calculating one-dimensional unsteady flow regime of water in a canal.

Key words: unsteady flow, the Saint-Venant's equations, the calculation of unsteady flow.

Введение

В настоящее время разработанные методы расчета неустановившегося движения потока в реке или канале, в основе которых лежат уравнения системы Сен-Венана (гидродинамическое уравнение движения и уравнение неразрывности), являются приближенными. Это обусловлено исключением из рассмотрения одного из слагаемых гидродинамического уравнения, учитывающих силу инерции. При полном исключении этих слагаемых приходим к уравнению Шези, описывающему равномерное движение. Но рассматриваемое движение, как нам известно, не является таковым. Следовательно, при решении задачи о неустановившемся движении потока упрощать гидродинамическое уравнение упомянутой системы не следует.

Исследование обозначенной проблемы привело авторов настоящей работы к уточнению написания этого уравнения, что, в свою очередь, позволило осуществить его использование без упрощения. Перейдём к обоснованию гидродинамического уравнения Сен-Венана в новой его записи.

Вывод гидродинамического уравнения движения жидкости Сен-Венана в новой его записи

Запишем следующее уравнение баланса сил в случае неустановившегося движения потока в реке (канале) при одномерной задаче, в котором слагаемые являются проекциями сил на ось x:

$$P = F + T_{\text{р}}, \tag{1}$$

где P – сила тяжести, действующая на воду массой m; F – сила инерции этой массы; $T_р$ – сила трения потока воды о дно и берега реки при его равномерном движении. Силой трения потока жидкости о воздух атмосферы в (1) пренебрегаем.

Выразим слагаемые в (1) по соответствующим формулам:

$$P = mgI, \tag{2}$$

$$F = ma = m\frac{d\nu_v}{dt} = m\left(\frac{\partial \nu_v}{\partial t} + \nu_v \frac{\partial \nu_v}{\partial x}\right), \tag{3}$$

$$T_р = mgi_р = mg\frac{\nu_p^2}{C^2 H}, \tag{4}$$

где g – ускорение свободного падения; I и $i_р$ – уклон свободной водной поверхности потока при неустановившемся и равномерном его движениях; $a = \frac{d\nu_v}{dt}$ – полное ускорение (локальное и конвективное) движения жидкости; ν_v и $\nu_р$ – дополнительная скорость потока при неустановившемся и скорость потока при равномерном его движениях; C – коэффициент Шези; H – глубина потока. Дополнительная скорость потока ν_v – это разность полной скорости потока ν, наблюдающейся при неустановившемся движении, и скорости $\nu_р$, наблюдающейся при его равномерном движении при одной и той же глубине потока H_k (рис. 1):

$$\nu_v = \pm(\nu_{п,с} - \nu_р),$$

где $\nu_п$ и $\nu_с$ – скорости потока при подъеме и спаде уровня воды. Если $\nu_v \to 0$, то окажемся на кривой равномерного движения потока 1.

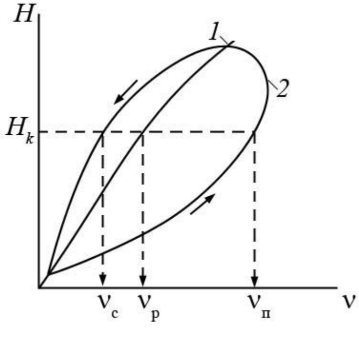

Рис. 1. Кривые средней скорости в створе реки при равномерном (*1*) и неустановившемся (*2*) движениях потока воды; $\nu_п$ и $\nu_с$ – скорости потока при подъеме и спаде уровня воды в реке; $\nu_р$ – скорость потока при его равномерном движении

Отметим здесь, что, используя уникальные измерения гидравлических характеристик, выполненных Государственным гидрологическим институтом на р. Тверце при попусках из Новотверецкого водохранилища [3], нам удалось [1] установить эмпирическую зависимость дополнительной скорости ν_v с уклоном водной поверхности потока:

$$\nu_v = \alpha_{\text{п,с}} i_{\text{р}} \Delta I, \tag{5}$$

где $\alpha_{\text{п}} = 1{,}3 \cdot 10^7$ м/с и $\alpha_{\text{с}} = 2{,}3 \cdot 10^7$ м/с – коэффициенты, применяемые при расчете скорости ν_v для периода подъема и соответственно периода спада уровня воды при петлеобразной кривой скоростей; $\Delta I = I - i_{\text{р}}$ при глубине потока H_k. Скорость ν_v, обусловленная силой инерции, названа нами скоростью движения линии следования постоянной данной скорости течения воды в реке ν и определяется она на графике $\nu = f(x,t)$ как тангенс угла наклона этой изолинии в створе на расстоянии x к оси времени t: $\nu_v = \dfrac{dx}{dt} = \operatorname{tg}\varphi$ (рис. 2) [5]. Она характеризует скорость перемещения выбранной скорости потока ν вдоль оси x.

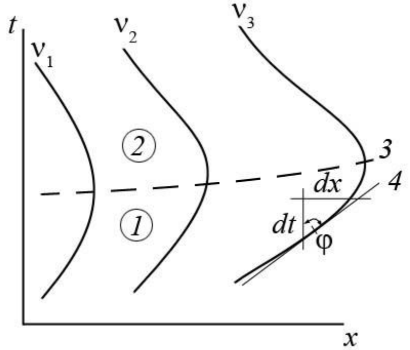

Рис. 2. Линии следования постоянной скорости течения воды в реке: ν_1, ν_2 … ν_i; цифры *1* и *2* соответствуют периодам подъема и спада уровня воды в реке; *3* – линия, соединяющая точки перегиба изолиний скорости. В точках перегиба изолиний скорости касательная *4* к ним параллельна оси времени *t*, что соответствует наступлению равномерного движения потока

Если теперь решим совместно зависимости (1) – (4), то получим гидродинамическое уравнение движения жидкости в новой его записи, характеризующее кривую скоростей *2* на рис. 1:

$$I = \frac{1}{g}\frac{\partial \nu_v}{\partial t} + \frac{\nu_v}{g}\frac{\partial \nu_v}{\partial x} + \frac{\nu_{\text{р}}^{2}}{C^2 H}. \tag{6}$$

Перейдя в (6) к уклонам, получим:

$$I = \Delta I + i_{\text{р}}. \tag{7}$$

Выполнив анализ (7), приходим к выводу, что уклон I обусловливает скорость потока ν, уклон $i_{\text{р}}$ – скорость потока $\nu_{\text{р}}$, а разность этих уклонов $\Delta I \sim \Delta\nu = \nu - \nu_{\text{р}} = \nu_v$. То есть, дополнительная скорость ν_v обусловлена силой, равной разности сил тяжести P и трения $T_{\text{р}}$, упомянутых выше. В связи с этим можем утверждать, что задача о неустановившемся движении воды в реке состоит из двух решений: 1) из решения определения скорости течения при равномерном движении потока $\nu_{\text{р}}$, определяемой через уклон дна реки, и 2) из решения определения скорости течения при неустановившемся движении потока ν_v, определяемой через разность уклонов водной поверхности при неустановившемся и равномерном движениях воды в реке: $\nu = \nu_{\text{р}} \pm \nu_v$.

Присоединим к уравнению (6) уравнение неразрывности в виде

$$\frac{\partial z}{\partial t} + H\frac{\partial \nu}{\partial x} + v\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \tag{8}$$

в котором z – отметка поверхности воды в створе реки.

Теперь, учитывая, что $\nu = \nu_{\text{р}} + \nu_v$, преобразуем второе слагаемое в (8), тогда это уравнение примет вид:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\left[H\left(\frac{\partial \nu_{\text{р}}}{\partial x} + \frac{\partial \nu_v}{\partial x}\right) + v\frac{\partial H}{\partial x}\right]. \tag{9}$$

Совместное решение (6), (7) и (9) при исключении $\frac{\partial \nu_v}{\partial x}$ дает уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{H}{\nu_v}\frac{\partial \nu_v}{\partial t} - H\frac{\partial \nu_{\text{р}}}{\partial \text{x}} - \frac{Hg}{\nu_v}\Delta I - v\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{10}$$

позволяющее рассчитать отметки свободной поверхности потока воды в реке при его неустановившемся движении.

Исходные данные для расчета неустановившегося движения воды в прямолинейном канале

Так как расчет неустановившегося движения по уравнению (10) выполняется впервые, рассмотрим его для наиболее простого случая.

Расчет уровенного режима выполним для широкого прямолинейного канала длиной $L = 300$ км при уклоне дна i = 0,1 ‰ и коэффициенте шероховатости $n = 0{,}02$. Вычисления будем вести в расчете на 1 м ширины потока.

Начальные условия – отметки свободной поверхности при $t = 0$ зададим зависимостью

$$z = 100 - 0{,}0001x, \tag{11}$$

где x – расстояние от начального створа в метрах; 100 – отметка поверхности воды в начальном створе в метрах.
Из этой зависимости следует, что в начальный момент времени глубина потока H по всей длине постоянная $(H = H_0 = \text{const})$. Отсюда также следует, что уклоны дна и свободной поверхности положительны и равны между собой. Глубина в начальном створе принята равной $H_0 = 5$ м.

Граничные условия зададим соответственно в начальном и конечном сечениях участка канала:

1) суточным колебанием уровня воды в начальном створе по синусоиде вида:

$$z_0 = 100 - 2{,}25\sin\frac{\pi}{12}t, \tag{12}$$

2) неизменным уровнем воды в конечном створе

$$z_L = \text{const}, \tag{13}$$

где z_0 и z_L – отметки свободной поверхности воды в начальном и конечном створах; t – время, ч.

Условие (13) означает, что глубина в конце канала во времени не меняется. Это может, например, соответствовать случаю впадения канала в водохранилище.

Конечно-разностная аппроксимация уравнения, описывающего трансформацию волны попуска

Для расчета трансформации волны попуска описываемой зависимостью (10) применим метод сеток. Для этого дифференциальное уравнение (10) заменим конечно-разностным уравнением, при этом учитывая, что $\nu_v = \Delta\nu = \nu - \nu_{\text{р}}$, тогда получим:

$$\Delta z = H\left(1 - \frac{\Delta\nu_{\text{р}}}{\Delta x}\Delta t - \frac{g}{\nu_v}\Delta I \Delta t - \frac{\nu}{H}\frac{\Delta H}{\Delta x}\Delta t\right), \tag{14}$$

где скорость при равномерном движении потока $\nu_{\text{р}}$ будем определять по формуле Шези, а коэффициент Шези C – по формуле Маннинга; Δt – время, за которое происходит изменение скорости в гидростворе от значении $\nu_{\text{р}}$ при равномерном движении до значения ν при неустановившемся движении потока. Скорость перемещения ν_v линии следования постоянной скорости течения ν рекомендуется определять по формуле (5), полученной с использованием натурных экспериментальных данных по р. Тверце.

Теперь запишем уравнение (14) для расчета по конечно-разностной схеме. Расчет будем вести по схеме «правый нижний уголок»:

$$z_{i,j+1} = z_{i,j} + H_{i,j}\left(1 - \frac{\left(\nu_{\text{pi,j}} - \nu_{\text{pi-1,j}}\right)\Delta t}{\Delta x} - \frac{g}{\nu_{vi,j}}\Delta I_{i,j}\Delta t - \frac{\nu_{i,j}}{H_{i,j}}\frac{\left(H_{i,j} - H_{i-1,j}\right)}{\Delta x}\Delta t\right), \tag{15}$$

где Δx и Δt – шаги по длине потока и по времени.

Для устойчивости решения в случае отсутствия в уравнении (6) слагаемого, учитывающего силу трения, необходимо соблюдать соотношение шагов по времени и по продольной координате [5]:

$$\frac{\nu_v \Delta t}{\Delta x} \le 1. \tag{16}$$

Для определения шагов в данном случае, когда учитывается в этом уравнении сила трения, используются в расчетах следующие формулы:

$$\Delta x = \frac{\nu_v^2}{g \Delta I}, \tag{17}$$

$$\Delta t = \frac{\nu_\text{v}}{g \Delta I} \tag{18}$$

или с учетом (5)

$$\Delta t = \frac{\alpha_{\text{п,с}} i_\text{р}}{g}. \tag{19}$$

Отметим, что совместное решение (17) и (18) приводит к условию (16).

Выражения (17) и (18), предназначенные для определения шагов Δx и Δt, относительно приближённые. Это мы увидим, если решим (6) с учётом (5) и (7) относительно шагов Δx или Δt, например, относительно шага по времени:

$$\Delta t = \frac{\alpha_{\text{п,с}} i_\text{р} \Delta I}{g \Delta I - \nu_\text{v} \dfrac{\partial \nu_\text{v}}{\partial x}}. \tag{20}$$

Исключив в (20) второе слагаемое в знаменателе, как пренебрежимо малую величину, придём к выражению (19).

Разработка программы для расчета неустановившегося движения воды в прямолинейном канале*

Программа для расчета по уравнению (15) разработана нами с использованием языка С++.

С целью перевода математического языка на язык машины был разработан алгоритм, в котором отображены шаги (17) и (18), необходимые для расчета по этому уравнению.

Для расчетов по уравнению (15) величина шага по длине была принята равной 1000 м, согласно (15) и (16). Из предварительных расчетов по формуле (19) стало известно, что величина шага по времени Δt в нашем случае принимает значение 0,0651 ч (3,91 мин).

* Авторы выражают благодарность доценту кафедры гидрофизики и гидропрогнозов университета Е. В. Гайдуковой за оказанную помощь в разработке программы данной задачи.

Результаты расчета представлены на рис. 3 ходом уровня воды во времени в различных створах канала и продольными профилями водной поверхности в различные моменты времени. По графикам можно проследить распластывание волны попуска.

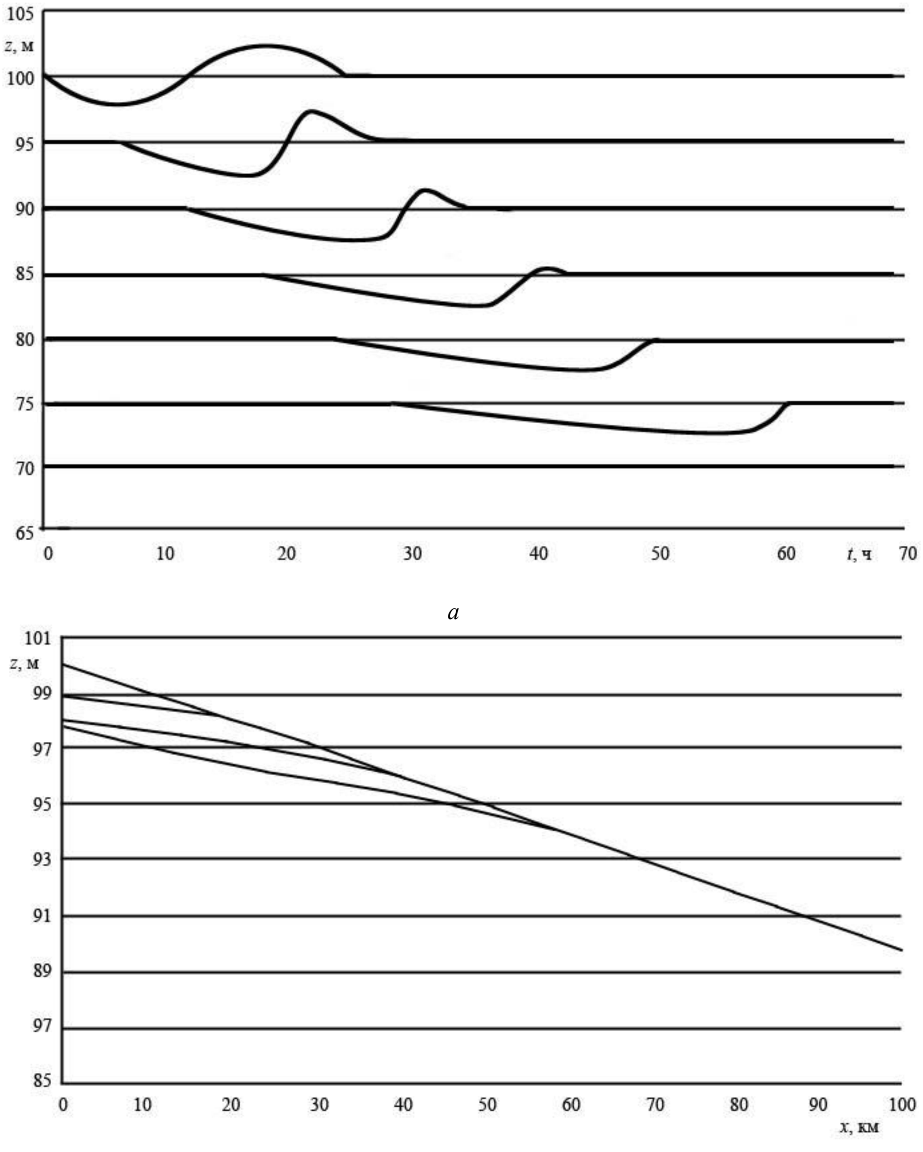

Рис. 3. Ход уровня воды в створах канала, расположенных на расстояниях $x = 0$, 50, 100, 150, 200, 250 км (*а*); отметки уровня воды по длине потока в период его спада (первые 6 ч эксперимента: 0, 2, 4, 6 ч) (*б*)

Таким образом, выполненные исследования показали, что гидродинамическое уравнение Сен-Венана в новом варианте записи может применяться для расчета неустановившегося движения воды в открытых потоках.

Насколько точны результаты расчета в связи с уточнением слагаемых уравнения говорить еще рано, так как метод необходимо еще совершенствовать, а сами расчеты – проверить на натурном материале. В частности, в расчетных уравнениях как старой, так и новой записи необходимо оперировать не с уклоном водной поверхности I, при котором завышается сила тяжести, а с уклоном $I_{\text{ср}} = \frac{I + i_{\text{д}}}{2}$, где уклон дна $i_{\text{д}} = i_{\text{р}}$.

Итак, преимуществом предлагаемого метода расчета неустановившегося движения воды в реке по сравнению с существующими методами является то, что в гидродинамическом уравнении в новой его записи учитываются оба ускорения – локальное и конвективное, в то время как в других методах одним из них, а иногда даже слагаемым, учитывающим сопротивление дна реки потоку, пренебрегают [2, 4 и др.].

Литература

1. *Винников С. Д.* Некоторые аспекты речной гидравлики // Уч. зап. РГГМУ, 2007, № 4, с. 67-76.
2. *Грушевский М. С.* Неустановившееся движение воды в реках и каналах. – Л.: Гидрометеоиздат, 1982. – 288 с.
3. *Исследование неустановившегося* движения воды на реках Тверце и Оредеж / Под ред. Н.Е. Кондратьева, В. А.Урываева. – Л.: Гидрометеоиздат, 1961. – 288 с.
4. *Кучмент Л. С.* Модели процессов формирования речного стока. – Л.: Гидрометеоиздат, 1980. – 143 с.
5. *Турчак Л. И., Плотников П. В.* Основы численных методов. – М.: Физматлит, 2002. – 304 с.