

**ГИДРОЛОГИЯ***В.В. Коваленко***ДИАГНОСТИРОВАНИЕ БИФУРКАЦИОННЫХ ОЧАГОВ  
ПРИ ФОРМИРОВАНИИ МНОГОЛЕТНЕГО ГОДОВОГО СТОКА  
(НА ПРИМЕРЕ ЕТР)***V. V. Kovalenko***DIAGNOSIS OF THE BIFURCATION LESIONS  
IN THE FORMATION OF A MULTI-YEAR ANNUAL FLOW  
(ON AN EXAMPLE OF EUROPEAN TERRITORY OF RUSSIA)**

*Предложена модель формирования многолетнего годового стока в виде логистического отображения с дробной нелинейностью, позволяющая диагностировать появление бифуркационных очагов в зависимости от климатических условий, в которых находятся речные бассейны.*

*Ключевые слова: многолетний речной сток, логистические отображения, нелинейность, бифуркации, климат.*

*The model of formation of long-term annual flow in the form of logistic map with fractional nonlinearity allows diagnostics stirovat appearance of bifurcation lesions, depending on the climatic conditions in which there are river basins.*

*Key words: long-term river flow, logistic map, nonlinearity, bifurcation, climate.*

**Мотивация исследования**

В последние годы уделяется повышенное внимание [2, 7] тому обстоятельству, что в некоторых регионах кривые распределения плотности вероятности (в частности многолетнего речного стока) выходят за рамки семейства кривых К. Пирсона, которые обычно применяются в практической гидрологии (подобные рекомендации зафиксированы в нормативных документах [12, 13]). Эмпирические распределения часто имеют так называемый «толстый хвост» или полимодальны. До недавнего времени это обстоятельство объяснялось ограниченностью статистических выборок (короткими рядами наблюдений). Для подтверждения справедливости подобной точки зрения часто ссылаются на возможность удлинения рядов методом Монте-Карло. Первоначальные «беззубые» гистограммы по мере увеличения числа испытаний становятся ярко выраженными одномодальными распределениями плотности вероятности. При этом забывают, что для задания фильтра используются три начальных момента (или расчетных гидрологических характеристики: норма, коэффициенты вариации и асимметрии), которые ничего другого, кроме одномодального распределения, и дать не могут.

В 1961 г. Л.М. Конаржевский [5] в ходе исследований и качественной оценки типовых особенностей вариаций рядов весеннего половодья в лесостепной и степной зонах выявил многочисленные случаи (68 %) двухмодальных распределений. Он объяснил появление двухмодальности особенностями формирования весеннего стока в степной зоне, а именно зимними потерями запасов воды на водосборе, которые увеличивают в многолетнем разрезе число лет с очень низким стоком за счет уменьшения средних по водности лет.

А.В. Рождественский и А.И. Чеботарев [9] объясняют это явление тем, что в формировании стока весеннего половодья в многоводные годы принимает участие вся площадь водосбора, а в маловодные – только ее часть (без бессточных понижений). Это изменение величины действующей площади приводит к появлению второй моды в зоне повышенного стока из-за разнородности величин стока в статистической совокупности.

В последнем нормативном документе в области инженерных гидрорасчетов [13] рассмотрен метод «усеченных распределений», который допускает существование неоднородных распределений расходов воды и разделение их на две однородные совокупности. В данном случае двухмодальность связывается с разным генетическим происхождением стока (снеговые и дождевые максимумы), хотя применяемые при этом статистические методы (общее ранжирование ряда наблюдений, использование медианного значения и т. п.) являются атрибутами единой статистической совокупности.

В статье предлагается физическое («генетическое») объяснение правомерности появления многомодальности (для регионов, где теряется устойчивость моментов кривых из семейства Пирсона) с помощью механизма отображений с дробной нелинейностью. Двухмодальность в этом случае объясняется не неоднородностью выборки (разная природа максимумов стока), а механизмом формирования стока (выборка при этом рассматривается как статистически однородная).

### **Генезис преодолеваемого гносеологического тупика**

Базовой (онтологической) моделью формирования всех видов многолетнего стока является уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК):

$$\frac{\partial p(Q, t)}{\partial t} = - \frac{\partial [A(Q, t)p(Q, t)]}{\partial Q} + 0,5 \frac{\partial^2 [B(Q, t)p(Q, t)]}{\partial^2 Q}, \quad (1)$$

где  $p(Q, t)$  – плотность вероятности расхода воды  $Q$  (модуля, слоя);  $A(Q, t)$  и  $B(Q, t)$  – коэффициенты сноса и диффузии, определяемые физико-статистическими свойствами речного бассейна и внешних воздействий на него, представленных задаваемыми параметрами, входящими в выражения для  $A$  и  $B$ .

Наиболее широкое практическое применение находит подобная модель, основанная на линейном формирующем фильтре и приводящая к хорошо изученному в математической статистике семейству кривых Пирсона (в установленном статистическом режиме), которое, в основном, и применяется в гидрологии [9, 12, 13]. Примером может служить уравнение

$$dQ = [-(\bar{c} + \tilde{c})Q + (\bar{N} + \tilde{N})] dt, \quad (2)$$

которое приводит к модели ФПК с коэффициентами сноса и диффузии, имеющих следующий вид:

$$A(Q, t) = -(\bar{c} - 0,5G_{\tilde{c}})Q - 0,5G_{\tilde{c}\tilde{N}} + \bar{N}; \quad (3)$$

$$B(Q, t) = G_{\tilde{c}}Q^2 - 2G_{\tilde{c}\tilde{N}}Q + G_{\tilde{N}}, \quad (4)$$

где  $c = 1/k\tau$ ,  $N = \dot{X}/\tau$  (здесь  $k$  – коэффициент стока,  $\tau$  – время релаксации,  $\dot{X}$  – интенсивность осадков);  $\bar{c}$  и  $\bar{N}$  – математические ожидания;  $\tilde{c}$  и  $\tilde{N}$  – белые шумы с интенсивностями  $G_{\tilde{c}}$  и  $G_{\tilde{N}}$ ;  $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$  – взаимная интенсивность шумов.

На практике оперируют несколькими начальными моментами ( $m_i, i = \overline{1, 4}$ ), так как старшие моменты бессмысленно привлекать при ограниченной продолжительности наблюдений. Поэтому разумно аппроксимировать модель ФПК системой обыкновенных дифференциальных уравнений для моментов [3]:

$$dm_1/dt = -(\bar{c} - 0,5G_{\tilde{c}})m_1 + \bar{N} - 0,5G_{\tilde{c}\tilde{N}}; \quad (5)$$

$$dm_2/dt = -2(\bar{c} - G_{\tilde{c}})m_2 + 2\bar{N}m_1 - 3G_{\tilde{c}\tilde{N}}m_1 + G_{\tilde{N}}; \quad (6)$$

$$dm_3/dt = -3(\bar{c} - 1,5G_{\tilde{c}})m_3 + 3\bar{N}m_2 - 7,5G_{\tilde{c}\tilde{N}}m_2 + 3G_{\tilde{N}}m_1; \quad (7)$$

$$dm_4/dt = -4(\bar{c} - 2G_{\tilde{c}})m_4 + 4\bar{N}m_3 - 4 \cdot 3,5G_{\tilde{c}\tilde{N}}m_3 + 6G_{\tilde{N}}m_2. \quad (8)$$

Из этой системы уравнений видно, что при  $\beta = G_{\tilde{c}}/\tilde{c} = 2/i$  (здесь  $i$  – порядок момента) происходит потеря устойчивости решения для соответствующего момента (чем старше момент, тем при меньшей относительной интенсивности шума  $\beta$  он теряет устойчивость). Ранее (см. [2]) было получено выражение, позволяющее вычислять значения  $\beta$  по информации, измеряемой на стандартной гидрометеорологической сети наблюдений:

$$\beta = 2 k \ln r + 2, \quad (9)$$

где  $r$  – коэффициент автокорреляции ряда расходов;  $k$  – коэффициент стока.

Оказалось, что значительная часть юга ЕТР неустойчива по старшим моментам, а значит и по расчетным гидрологическим характеристикам – коэффициентам вариации и асимметрии (рис. 1).

Сама по себе неустойчивость не указывает, какой моделью надо описывать сток в неустойчивых зонах на рис. 1. Она является индикатором того, что в них не срабатывает одномодальная асимметричная идеализация, к которой приводит кривая Пирсона III типа (или ее модификация, выполненная Крицким–Менкелем), также как и вообще семейство кривых из распределений Пирсона.

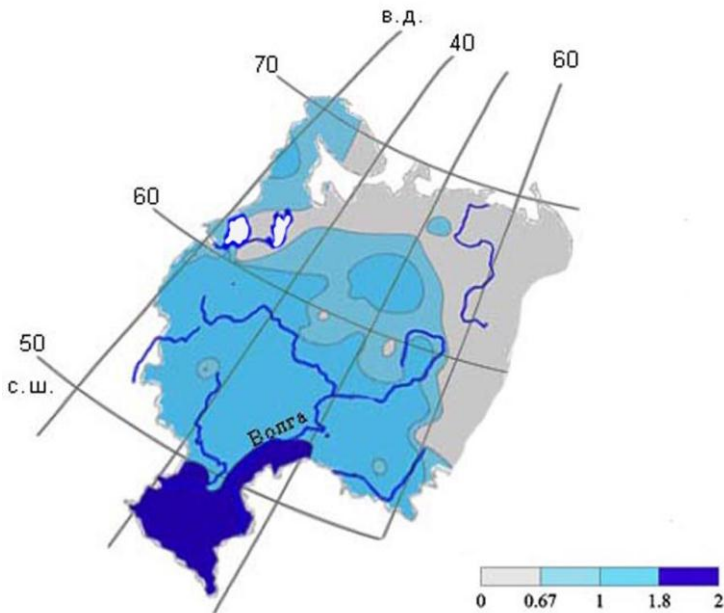


Рис. 1. Распределение зон неустойчивости вероятностных моментов годового стока ЕТР по критерию  $\beta$

Эмпирические распределения (гистограммы) в зонах неустойчивости чаще всего двухмодальны. Это своеобразный эпистемологический тупик инженерной гидрологии, ориентированной на одномодальные распределения. (На современном уровне развития практической гидрологии он «преодолевается» ссылками на уже упоминавшийся метод Монте-Карло и на статистическую незначимость второй моды: по такому-то критерию на таком-то уровне значимости ее можно проигнорировать.)

**Модель для выявления бифуркационных очагов**

В основе стохастической модели формирования стока, приводящей к распределениям из семейства кривых Пирсона, лежит динамическое ядро (обыкновенное дифференциальное уравнение) в виде линейного формирующего фильтра

$$dQ/dt = -Q/kt + \dot{X} / \tau \tag{10}$$

[ $k, \tau, \dot{X}$  см. пояснения к формулам (3) и (4)].

Предполагается, что  $\tau = \text{const}$ . Однако если посмотреть на редуцированные зависимости модуля стока  $q$  от площади бассейна  $F$  (размеры площади наряду с географическим расположением бассейна, определяют значение  $\tau$ ), то видно (рис. 2), что для южных регионов (сухостепные и полупустынные районы) имеет место зависимость  $\tau = \text{const}/q^n$  (можно использовать разные аналитические

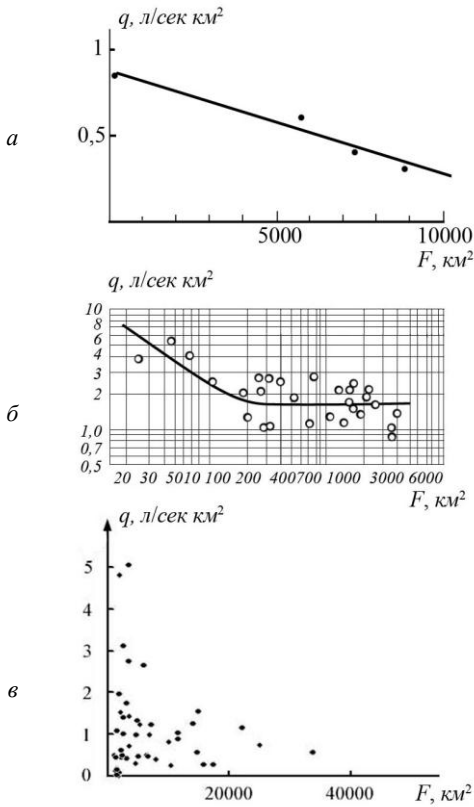


Рис. 2. Зависимости  $q = f(F)$  для Северного Казахстана ( $a$  – по данным табл. 5.12 из работы [11]), Южного Заволжья и Прикаспийской низменности ( $б$  – из работы [11]) и верховьев Обского бассейна ( $в$ )

ми хвостами», а могут быть ситуации, когда вообще отсутствуют стационарные распределения (это зависит от характера взаимодействия аддитивных и мультипликативных вводимых в модель шумов).

Учитывая, что практически мы имеем дело с дискретными рядами годового стока, имеет смысл перейти от дифференциального уравнения к отображению:

$$Q_{i+1} = Q_i - Q_i^{(n+1)} / kQ_0 + Q_i^n \dot{X} / Q_0, \quad (12)$$

(здесь  $Q_0 = W / \Delta t$ , где величина  $\Delta t$  равна одному году).

В зависимости от значения параметра  $n$  результаты применения (12) будут отличаться, но в широком диапазоне его изменения качественная картина бифуркаций будет сохраняться. Рассмотрим сначала классический случай логистического отображения [ $n = 1$ , при таком значении  $n$  нет необходимости в до-

приближения, например, по типу редуционных зависимостей максимального стока [1], с. 270). Объяснение подобного характера зависимостей наиболее вероятно связано с большими потерями воды на испарение (см. [11], с. 152). Показатель редуции  $n$  может меняться, главное чтобы модуль стока уменьшался с увеличением площади водосбора. В подобных случаях вместо линейного фильтра имеет смысл рассматривать нелинейную модель:

$$dQ/dt = -Q^{(n+1)} / kW + Q^n \dot{X} / W, \quad (11)$$

где константа в редуционной зависимости обозначена как  $W$ ; она имеет (при  $n = 1$ ) размерность объема и определяет насыщающую емкость речного бассейна (в качестве  $Q$  могут фигурировать модули или слои при соответствующем изменении размерности  $\dot{X}$ ).

Возможные варианты распределений  $p(Q)$  при использовании в модели ФПК динамического ядра в виде (11) при  $n = 1$  рассмотрены в работе [2]. Распределения могут быть одномодальными, с «подняты-

полнительных коэффициентах для сохранения размерности в (12)]. Уравнение (12) можно привести к виду:

$$Q_{i+1} = Q_i + cQ_i(1 - Q_i / k\dot{X}), \quad (13)$$

где  $c = \dot{X} / Q_0$  – бифуркационный параметр, представляющий, фактически, величину, обратную коэффициенту стока. Известно (см., например, [2, 8]), что в интервале  $c \in (2, 2.57)$  происходят бифуркации удвоения периода (с определенными нюансами, связанными с появлением на бифуркационной диаграмме «окон прозрачности»).

Чтобы «привязать» модель (13) к конкретной географической ситуации вычислим значения  $c$  вдоль одного из меридианов, проходящих примерно по центру ЕТР (42° в.д.). Для этого используем карты распределения коэффициента стока. Полученная зависимость представлена на рис. 3, а.

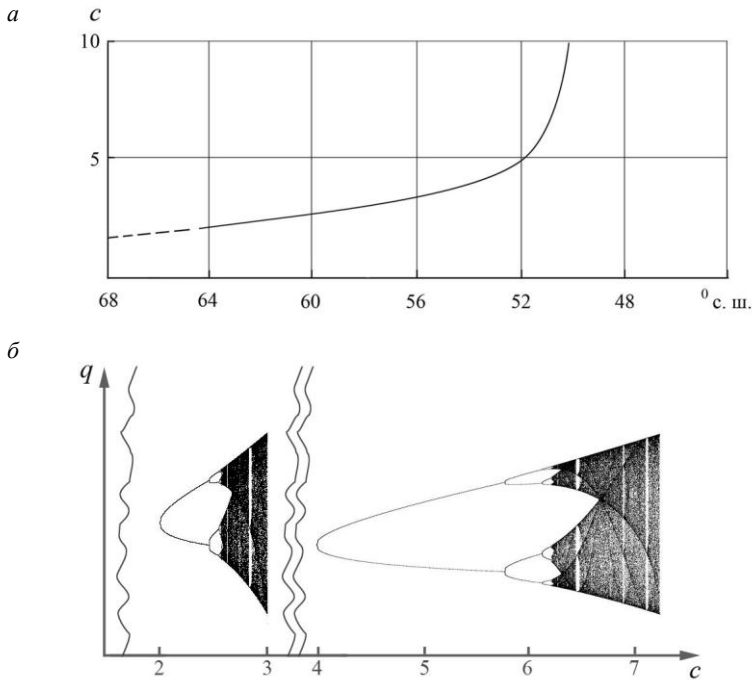


Рис. 3. Зависимость бифуркационного параметра  $c$  от географической широты и вид бифуркационных очагов при  $n = 1$  (слева) и  $n = 0,5$

Из рис. 3, а видно, что уже начиная с 62° с.ш. распределение плотности вероятности должно быть полимодальным, так как примерно с широты, на которой расположен г. Петрозаводск запускается механизм бифуркаций. Однако, судя по рис. 1, это должно происходить несколько южнее, по крайней мере с тех широт, где теряет устойчивость дисперсия и близок к критическим значе-

ниям критерий устойчивости по математическому ожиданию. Именно на этих широтах ставится под сомнение «дееспособность» линейного формирующего фильтра, приводящего к одномодальным распределениям. Если же исходить из левой бифуркационной диаграммы на рис. 3, б, то примерно с широты г. Ярославля мы выходим не только за рамки одномодальных распределений, но и полимодальных. Статистическое изучение речного стока в рамках рассматриваемых моделей становится невозможным, начинается «инфракрасная зона».

Однако область действия моделей можно существенно увеличить, если уменьшить показатель редукции модуля стока в модели (12). Например, при  $n = 0,5$  бифуркационный очаг сместится к югу. Это более соответствует действительности, так как мы смещаемся ближе к области лесостепей и степей, в которых больше оправдываются зависимости, представленные на рис. 2. В зонах избыточного и достаточного увлажнения репрезентативные площади малы (500–1500 км<sup>2</sup>) и кривая редукции быстро выходит на горизонтальный участок.

Судя по рис. 3, б, при  $n = 0,5$  на значительной части ЕТР должен реализовываться двухмодальный режим формирования стока, порожденный периодом, равным двум. И действительно, этот факт подтверждается исследованиями Э.И. Саруханяна и Н.П. Смирнова [10]. Ими установлено, что в бассейне Волги (он попадает в неустойчивую область на рис. 1) «двухлетнее циклическое колебание является одним из основных компонентов изменений стока рек Волжского бассейна. Однородность этого колебания в пространстве и относительная устойчивость в течение длительного времени свидетельствуют о его реальности» (рис. 4).

Сами по себе двухлетние циклы колебаний в геофизике известны с конца XIX в. (температура воздуха, стратосфер-

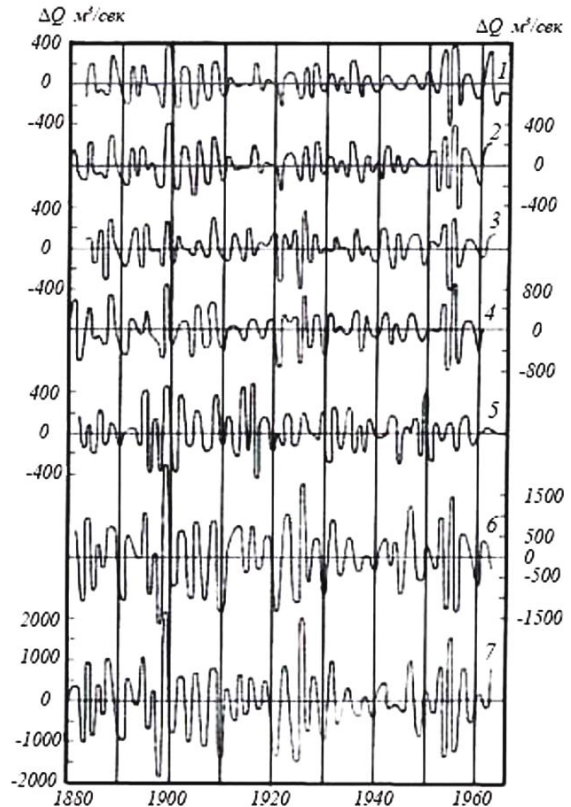


Рис. 4. Значения расходов в створах бассейна Волги (фильтр «1 минус 3», см. [10]).

1 – приток в Рыбинское водохранилище; 2 – сток Волги у Ярославля; 3 – сток Оки у Горбатова; 4 – сток Волги у Горького; 5 – сток Камы у Перми; 6 – сток Волги у Куйбышева; 7 – сток Волги у Волгограда (рисунок публикуется с согласия авторов)

ные ветры в экваториальной зоне, перераспределение воздушных масс). Авторы работы [10] именно в геофизических процессах («внешних воздействиях на речные бассейны») видят причины двухлетних циклов на створах бассейна Волги. В нашей же интерпретации – их механизм заключается в нелинейности формирования стока. Не исключено, что и геофизические циклы порождены бифуркционным механизмом. Это просто указывает на сравнительную универсальность механизма удвоения периода. (Следует заметить, что и сам бифуркационный параметр  $c = 1/k$  порожден во многом внешними для речного бассейна факторами: чем выше температура воздуха, тем ниже коэффициент стока. Именно это обстоятельство отражает карта распределения коэффициента стока на ЕТР и, как следствие, характер изменения параметра  $c$  с севера на юг, рис. 3, а.)

Таким образом, уравнение (12) вполне может выполнять роль модели, диагностирующей появление бифуркационных очагов. Причем не только в режиме мониторинга, но и в режиме долгосрочного прогнозирования. Известна, например, формула Тюрка [14], связывающая испаряемость  $E_0$  с температурой воздуха  $T$ :  $E_0 = 300 + 25T + 0,05T^3$ . С ее использованием коэффициенту стока можно придать следующий вид:

$$k = 1 - \operatorname{th} \left( \frac{300 + 25T + 0,05T^3}{\dot{X}} \right) \quad (14)$$

[эта формула справедлива при выполнении уравнения водного баланса для замкнутых водосборов ( $\dot{X} = Q + E$ ,  $k = Q/\dot{X} = (\dot{X} - E)/\dot{X} = 1 - E/\dot{X}$ ) и при использовании уравнения связи между испарением и осадками в форме, предложенной Н.А. Багровым, см. [6]; практически одинаковые результаты формула (14) дает и при использовании уравнения Э. М. Ольдекопа].

В эту формулу входят величины, в обязательном порядке присутствующие в любом долгосрочном климатическом сценарии (нормы осадков и температуры воздуха). Используя модель (12) и формулу (14), можно для любой точки поверхности суши (гидроствора) проследить возможную эволюцию распределения плотности вероятности расхода или модуля стока с одномодальной на многомодальную (и наоборот), а также прогнозировать временные интервалы, на которых возможны такие трансформации, т. е. появление и исчезновение бифуркационных очагов (см. также [15]).

На рис. 5 проиллюстрирована такая возможность для гипотетического сценария изменения коэффициента стока по части положительной волны синусоиды, охватывающей многолетний период [при анализе реальных сценариев надо использовать ход процесса  $k(t)$ , спрогнозированный по зависимости (14)]. В случае (а) режим стока на всем протяжении процесса может быть описан одномодальным распределением  $p(q)$ . Затем (б и в) происходит увеличение числа мод (вплоть до потери устойчивости самого механизма бифуркации (г), белая полоса в центре рисунка) и возвращение в устойчивое одномодальное состояние.



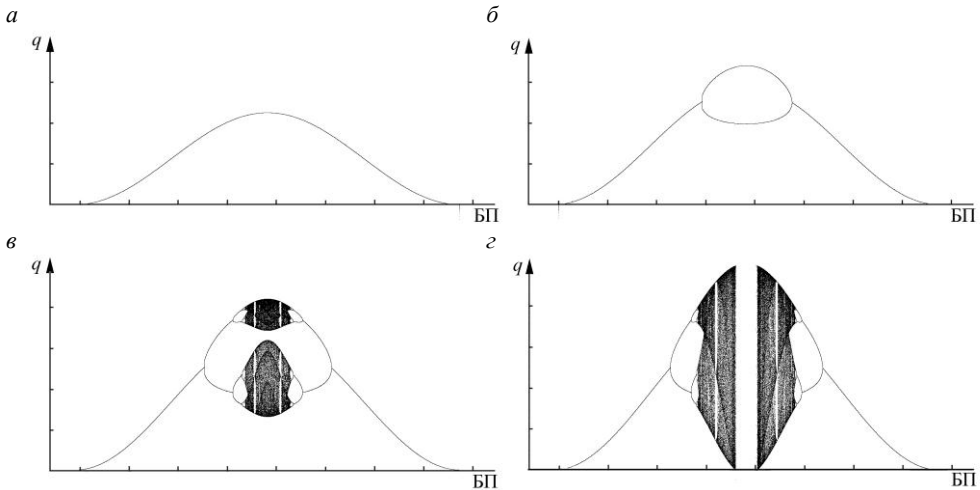


Рис. 5. Появление и исчезновение бифуркационных очагов при сценариях климата, отличающихся степенью уменьшения коэффициентов стока последовательно от а к г, входящего в бифуркационный параметр (БП), изменяющейся по оси абсцисс

Естественно, что «зашумление» модели (12) за счет годовой [пошаговой  $i$ ] изменчивости параметров  $k$  и  $\dot{X}$  (при численном моделировании это делается с помощью функции  $\text{Random}()$ ) приводит к размытости бифуркационных процессов  $q(t)$  (при сохранении основных качественных их черт) и к возможности построения реальных распределений плотности вероятности на основе генерирования стокового ряда с помощью отображения (12). Подобные примеры (для другого круга задач) приведены в работе [4].

На рис. 6 представлена уже не бифуркационная диаграмма, а часть временного ряда, структура которого усложняется слева направо по мере роста бифуркационного параметра.

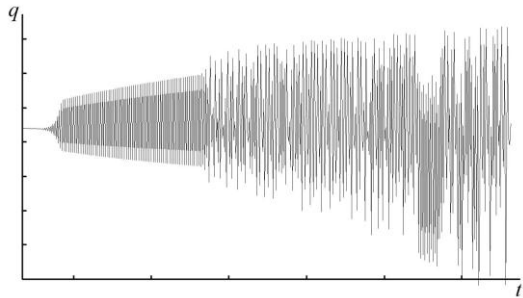


Рис. 6. Временная развертка процесса изменения модуля стока по мере увеличения численного значения бифуркационного параметра

### Выводы

1. В работе впервые в гидрологии применено логистическое отображение с дробной нелинейностью, позволившее подтвердить полученные ранее результаты по неустойчивости стохастической модели формирования многолетнего речного стока, основанной на линейном формирующем фильтре.

2. Выявлен возможный механизм возникновения полимодальности в вероятностных распределениях многолетнего годового стока, связанный с бифуркациями удвоения периода.

3. Предложен способ прогностического диагностирования бифуркационных очагов при долгосрочном изменении климата, основанный только на доступной информации, содержащейся в климатических сценариях.

### ***Литература***

1. *Владимиров А. М.* Гидрологические расчеты. – Л.: Гидрометеоздат, 1990. – 366 с.
2. *Коваленко В. В.* Частично инфинитное моделирование и прогнозирование процесса формирования речного стока. – СПб.: РГГМУ, 2004. – 198 с.
3. *Коваленко В. В.* Теория катастроф и эволюция дифференцируемых многообразий в частично инфинитной гидрологии. – СПб.: РГГМУ, 2008. – 178 с.
4. *Коваленко В. В.* Гидрологическое обеспечение надежности строительных проектов при изменении климата. – СПб.: РГГМУ, 2009. – 100 с.
5. *Конаржевский Л. М.* Типовые формы кривой обеспеченности характеристик весеннего стока с водосборов степной и лесостепной зон // Изд. Каз. филиала АН СССР, сер. Энергетика и водное хозяйство, 1961, вып. 3, с. 130–146.
6. *Методы изучения и расчета водного баланса* / Под ред. В.С. Вуглинского и др. – Л.: Гидрометеоздат, 1981. – 398 с.
7. *Найденов В. И.* Нелинейная динамика поверхностных вод суши. – М.: Наука, 2004. – 318 с.
8. *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой. – М.: Прогресс, 1986. – 432 с.
9. *Рождественский А.В., Чеботарев А.И.* Статистические методы в гидрологии. – Л.: Гидрометеоздат, 1974. – 424 с.
10. *Саруханян Э. И., Смирнов Н. П.* Многолетние колебания стока Волги. – Л.: Гидрометеоздат, 1971. – 168 с.
11. *Соколовский Д.Л.* Речной сток (основы теории и методики расчетов): Учебник. Изд. 3-е, испр. и доп. – Л.: Гидрометеоздат, 1968. – 540 с.
12. *СНиП 2.01.14-83.* Определение расчетных гидрологических характеристик / Госстрой СССР. – М.: Стройиздат, 1985. – 36 с.
13. *СП 33-101-2003.* Определение основных расчетных гидрологических характеристик / Госстрой России. – М.: ФГУП ЦПП, 2004. – 73 с.
14. *Тюрк Л.* Баланс почвенной влаги. – Л.: Гидрометеоздат, 1958. – 228 с.
15. *Коваленко В.В.* Выбросы размерности фазовых пространств прогностических и диагностических моделей развития процессов катастрофического формирования многолетнего речного стока // Уч. зап. РГГМУ, 2010, № 15, с. 5–18.