В.А. Царев, Н.А. Подрезова

ЭФФЕКТЫ НЕГИДРОСТАТИЧНОСТИ В ФОРМИРОВАНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПЛОТНОСТНОЙ ЛИНЗЫ

V.A. Tsarev, N.A. Podrezova

NONHYDROSTATIC EFFECTS IN FORMATION OF PRESSURE DISTRIBUTION IN THE VICINITY OF DENSITY LENS

Рассматривается формирование возмущения давления в окрестности плотностной линзы, обусловленное неоднородностью поля плотности. Используется негидростатическая система уравнений движения, которая сводится к уравнению Пуассона для возмущения давления. Получено аналитическое уравнение, описывающее распределение возмущения давления в окрестности плотностной линзы. С помощью полученного решения анализируются особенности вертикального распределения по оси узкой и широкой линз.

Ключевые слова: плотностная линза, негидростатические эффекты, распределение давления, гидродинамика.

It is considered the formation pressure disturbance in the neighborhood of density lenses, due to inhomogeneity of the density field. The non-hydrostatic equations of motion are used. They are reduced to the Poisson equation for pressure perturbation. An analytical equation describing the distribution of pressure disturbances in the neighborhood of density lenses is presented. With the help of the solution analyzes the features of the vertical distribution along the axis of the narrow and wide lenses are investigated.

Keywords: density lens, non-hydrostatic effects, pressure distribution, hydrodynamics.

Для воды повышенной плотности сила тяжести обычно превышает вертикальную составляющую градиента давления, то есть в этом случае нарушается условие гидростатики. Неуравновешенная составляющая силы тяжести играет важную роль в формировании движения таких вод, с том числе расположенных у наклонного дна [2,10]. Из-за негидростатичности при моделировании динамики плотных вод в общем виде следует использовать негидростатическую систему уравнений движения. Однако, чаще используются различные упрощения, которые приводят к преобразованной системе гидростатических уравнений [3-9]. В частности, принимается, что в области расположения плотных вод давление формируется в основном фоновой жидкостью, а вертикальный градиент давления может быть найден из условия гидростатики. Это позволяет найти величину превышения силы тяжести над вертикальным градиентом давления в виде $F = g(\rho_1 - \rho_0)$, где ρ_1, ρ_0 – плотность плотной и фоновой жидкостей, g – ускорение свободного падения. В то же время понятно, что присутствие более плотной жидкости должно приводить к возмущению поля давления. В работе обсуждаются особенности поля давления в окрестности плотностной линзы, полученные с помощью негидростатической модели.

Основные уравнения

Для этой цели используется система уравнений движения и неразрывности в виде [10]

$$\frac{\partial u}{\partial t}-k_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-k_l\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}+R_u, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}-k_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-k_l\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial y}+R_v, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}-k_z\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-k_l\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial z}+R_w, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{4}$$

где

$$R_u=-g\frac{\rho}{\rho_0}\cos\alpha+fv-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}-w\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{5}$$

$$R_v=-g\frac{\rho}{\rho_0}\cos\beta-fu-u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial y}-w\frac{\partial v}{\partial z}, \tag{6}$$

$$R_w=-g\frac{\rho}{\rho_0}\cos\gamma-u\frac{\partial w}{\partial x}-v\frac{\partial w}{\partial y}-w\frac{\partial w}{\partial z}, \tag{7}$$

где u, v, w – составляющие скоростей течений; P – давление; ρ, ρ_0 – плотность и стандартная плотность воды; f – параметр Кориолиса; g – ускорение свободного падения; S – соленость; k_z, k_l – коэффициенты вертикального и горизонтального турбулентного обмена; α, β, γ – углы наклона осей x, y, z с вертикалью.

После суммирования продифференцированных по соответствующим осям уравнений движения получается уравнение для давления

$$\nabla^2 P=\rho_0\left(\frac{\partial R_u}{\partial x}+\frac{\partial R_v}{\partial y}+\frac{\partial R_w}{\partial z}\right). \tag{8}$$

Как следует из полученного уравнения (8), в дополнение к баротропной гидростатической составляющей давление также формируется за счет дивергенции сил, входящих в его правую часть. Основной вклад в правую часть уравнения вносит дивергенция силы тяжести, связанная с неоднородностью распределения плотности воды в море.

Рассмотрим закономерности формирования поля давления на примере неподвижной горизонтальной плотностной линзы при отсутствии влияния границ области.

С этой целью воспользуемся уравнением давления (8), которое с учетом принятых условий преобразуется к виду

$$\Delta P = -\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial z}. \quad (9)$$

Пусть диаметр линзы будет равен $2a$, а ее толщина – $2z_0$. Считая, что на верхней и на нижней границах линзы плотность воды меняется скачком, а разность составляет $\rho^* = \rho - \rho_0$, вертикальные производные, входящие в уравнение (1.8), могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \rho^* \delta\left(z_1, z_2\right), \quad (10)$$

где $\delta()$ – дельта-функция; z_1, z_2 – координаты положения верхней и нижней границ линзы.

Будем рассматривать возмущение давления, вносимое линзой, равное разности между реальным (P) и фоновым (P_0) давлениями

$$p = P - P_0. \quad (11)$$

Тогда уравнение (9) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = g\rho^* \delta\left(z_1, z_2\right). \quad (12)$$

Решение

В случае неподвижной горизонтальной линзы в бесконечной среде основными факторами, обуславливающими возникновение поля давления, являются дивергенция силы тяжести на ее верхней и нижней границах. Для упрощения исследования рассмотрим линзу, имеющую форму цилиндра. В этом случае результирующее распределение давления представляет собой сумму составляющих полей давления, обусловленное отдельно дивергенцией силы тяжести на верхней и конвергенцией силы тяжести на нижней границах. Каждая из этих составляющих может быть найдена с помощью метода потенциала простого слоя путем интегрирования потенциала. Если начало осей координат расположить в центре верхней границы линзы, ось z направить вертикально вверх, а оси x и у расположить вдоль ее плоскости, то тогда распределение поля давления за счет дивергенции силы тяжести на верхней границе линзы будет описываться уравнением [1]

$$p = -\frac{2a^2 g\rho^*}{\sqrt{r^2 - 2ar\sin\theta + a^2}} K\left(\sqrt{\frac{4ar\sin\theta}{r^2 - 2ar\sin\theta + a^2}}\right), \quad (13)$$

где $K\left(x\right) = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - x^2\cos^2\alpha}}$ эллиптический интеграл.

Особенности распределения возмущения давления в окрестности линзы

Получающееся при этом общее решение достаточно сложно, поэтому ограничимся его частным случаем. Рассмотрим распределение давления вдоль оси, проходящей через центр линзы перпендикулярно ее горизонтальным границам. В этом случае решение для верхней границы линзы принимает вид

$$\frac{p}{g\rho^*} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{z^2+a^2}-z\right), \text{ если } z>0 \\ -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{z^2+a^2}+z\right), \text{ если } z<0 \end{cases}, \tag{14}$$

где a – радиус линзы.

Согласно уравнению (14), вблизи верхней границы линзы формируется отрицательное давление. Действительно, принимая $z = 0$, получаем для p

$$\frac{p}{g\rho^*} = -\frac{1}{2}a. \tag{15}$$

Из полученного соотношения также следует, что давление в центре верхней границы линзы линейно зависит от радиуса линзы и перепада плотности ρ^*. После интегрирования уравнения (9) относительно точки с координатами $(x = a,\ z = 0)$, получим соотношение для давления на краю линзы

$$\frac{p}{g\rho^*} = -\frac{1}{2\pi}a. \tag{16}$$

Как видно из полученного соотношения, рассматриваемая составляющая давления у края верхней границы линзы отлична от нуля и лишь в π раз меньше соответствующего давления в центре линзы. Таким образом, имеет место радиальный градиент давления, средняя величина которого равна

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \left(\frac{\pi-1}{2\pi}\right)g\rho^* a.$$

Вблизи границы при ($z << a$) уравнение (14) преобразуется к виду

$$\text{——} \quad \begin{cases} --\left(a-z\right), \text{ если } z>0 \\ --\left(a+z\right), \text{ если } z<0 \end{cases} \tag{17}$$

откуда следует, что в данном случае давление возрастает линейно с расстоянием. На большом расстоянии ($z>>a$) уравнение (14) принимает вид

$$\frac{p}{g\rho^*} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{2z}\right), \text{ если } z>0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{2z}\right), \text{ если } z<0 \end{cases}, \tag{18}$$

то есть на расстоянии от границы линзы, существенно превышающей ее горизонтальные размеры, уменьшение абсолютной величины давления происходит обратно пропорционально расстоянию. Продифференцировав уравнение (14) по z, легко получить, что вдоль оси z вертикальный градиент давления описывается уравнением

$$\frac{1}{g\rho^*}\frac{\partial p}{\partial z} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}-1\right), \text{ если } z>0 \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}+1\right), \text{ если } z<0 \end{cases}. \tag{19}$$

Из (19) следует, что в центре линзы выше и ниже ее верхней границы вертикальный градиент давления при ($z \to 0$) равен по величине половине гидростатического, но имеет противоположные знаки. С расстоянием по z, в случае, когда ($|z| >> a$), уравнение (19) приводится к виду

$$\frac{1}{g\rho^*}\frac{\partial p}{\partial z} = \begin{cases} \frac{1}{4}\frac{a^2}{z^2}, \text{ если } z>0 \\ -\frac{1}{4}\frac{a^2}{z^2}, \text{ если } z<0 \end{cases}.$$

В этом случае, как следует из полученного соотношения, вертикальный градиент давления убывает обратно пропорционально z^2.

Для нижней границы линзы получаются аналогичные соотношения, но с противоположным знаком. Результирующее поле давления представляет собой сумму его составляющих, формирующихся в результате дивергенции силы тяжести на верхней и ее конвергенции на нижней границах линзы. Если начало координат разместить в центре линзы, то результирующее давление будет описываться уравнением

$$\frac{p}{g\rho^*} = -\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{a^2+(z-z_0)^2}-(z-z_0)\right)-\left(\sqrt{a^2+(z+z_0)^2}-(z+z_0)\right)\right], \tag{20}$$

где z_0 – расстояние до верхней и нижней границ линзы от начала осей координат, расположенных в центре линзы.

В случае, когда вертикальные размеры линзы существенно больше горизонтальных, составляющие давления концентрируются преимущественно в окрестности верхней и нижней границ линзы и практически не пересекаются. Формирующиеся вертикальные градиенты давления воздействуют лишь на относительно небольшие примыкающие к границам части линзы. Для большей части линзы сила тяжести $g\rho^*$ в значительной степени преобладает над вертикальным градиентом давления. Даже непосредственно у границ линзы вертикальный градиент составляет лишь половину силы тяжести. В результате в пределах линзы под влиянием неуравновешенной силы тяжести формируется вертикальное ускорение. В случае, когда горизонтальные размеры линзы значительно преобладают над вертикальными, результирующее давление по оси линзы описывается следующим уравнением:

$$\frac{p}{g\rho^*} \approx -\frac{1}{2}\left[\left(a\left(1+\frac{(z-z_0)^2}{2a^2}\right)+(z-z_0)\right)-\left(a\left(1+\frac{(z+z_0)^2}{2a^2}\right)+(z+z_0)\right)\right] = -\left(1-\frac{z_0}{a}\right)z. \qquad (21)$$

Соответственно вертикальный градиент давления в центре широкой линзы будет равен

$$\frac{1}{g\rho^*}\frac{\partial p}{\partial z} = -\left(1-\frac{z_0}{a}\right). \qquad (22)$$

Как следует из соотношения (22), в пределах широкой линзы вдоль оси z вертикальный градиент давления близок гидростатическому. Отличие от него определяется величиной z_0/a. Непосредственно над линзой вертикальное распределение давления вдоль оси, проходящей через центр линзы, будет описываться следующим уравнением:

$$\frac{p}{g\rho^*} = -\frac{1}{2}\left[\sqrt{a^2+(z-z_0)^2}-(z-z_0)-\sqrt{a^2+(z+z_0)^2}+(z+z_0)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[a\left(1+\frac{(z-z_0)^2}{2a^2}\right)-a\left(1+\frac{(z+z_0)^2}{2a^2}\right)+2z_0\right] = -2z_0\left(1-\frac{z}{a}\right). \qquad (23)$$

При этом вертикальный градиент давления вдоль оси z над линзой у ее верхней границы будет равен

$$\frac{1}{g\rho^*}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{z_0}{a}. \qquad (24)$$

С увеличением расстояния от верхней границы линзы при ($z > a$) давление стремится к нулю в соответствии с соотношением

$$\frac{p}{g\rho^*} = -\frac{1}{2}\left\{\left[\sqrt{(z-z_0)^2+a^2}-(z-z_0)\right]-\left[\sqrt{(z+z_0)^2+a^2}-(z+z_0)\right]\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{(z-z_0)\left(1+\frac{a^2}{2(z-z_0)^2}\right)-(z-z_0)-(z+z_0)\left(1+\frac{a^2}{2(z+z_0)^2}\right)+(z+z_0)\right\} = -\frac{a^2 z_0}{2z^2}. \qquad (25)$$

Соответственно вертикальный градиент давления убывает в соответствии с соотношением, которое получается путем дифференцирования уравнения (25) по z

$$\frac{1}{g\rho^*}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{a^2 z_0}{z^3}. \qquad (26)$$

Выводы

Представленные результаты можно обобщить в виде следующих выводов.

В случае, когда плотностная линза находится на расстоянии от поверхности или дна моря, существенно превышающим ее горизонтальные размеры, возмущение давления в области неподвижной плотностной линзы определяется дивергенцией силы тяжести на ее верхней и нижней границах.

Для узкой линзы, толщина которой существенно превышает ее диаметр, значимые вертикальные градиенты давления формируются лишь в области ее верхней и нижней границ. Их максимальная величина не превышает половины гидростатического вертикального градиента давления. Величина приращения давления на верхней границе линзы равна $\frac{p}{g\rho^*} = -\frac{1}{2}a.$ На нижней границе она имеет противоположное значение.

Для широкой линзы, диаметр которой превышает ее толщину, из-за наложения возмущений давления в области линзы формируется вертикальный градиент давления, близкий гидростатическому, но меньший его по величине. Разность между этими градиентами определяется отношением толщины линзы к ее диаметру. У нижней границы линзы приращение давления равно половине гидростатического. У ее верхней границы приращение давления равно по величине и противоположно по знаку приращению давления у нижней границы.

Литература

1. *Арфкен Г.* Математические методы в физике Атомиздат. – М., 1970 – 712 с.
2. *Бойцов В.Д., Карсаков А.Л., Аверкиев А.А., Густоев Д.В., Карпова И.П.* Исследование изменчивости гидрофизических характеристик по наблюдениям на разрезе «Кольский меридиан». // Ученые записки РГГМУ, 2010, № 15, с. 135-150.
3. *Гриценко В.А., Юрова А.А.* О распространении придонного гравитационного течения по крутому склону дна. // Океанология, 1997, т. 37, № 1, с. 44-49.
4. *Жмур В.В., Сапов Д.А., Нечаев И.Д., Рыжаков М.В., Григорьева Ю.В.* Интенсивные гравитационные течения в придонном слое океана. // Известия АН. Серия физическая, 2002, т. 66, № 12, с. 1721-1726.
5. *Жмур В.В., Якубенко М.В.* Динамика плотностных потоков на наклонном дне. // ДАН. Физика атмосферы и океана, 2001, № 37(4), с. 1-10.
6. *Зацепин А.Г., Гриценко В.А., Кременецкий В.В., Поярков С.Г., Строганов О.Ю.* Лабораторное и численное исследование процесса распространения плотностного течения по склону дна. // Океанология, 2005, т. 45, № 1, с. 5-15.
7. *Максименко Н.А., Зацепин А.Г.* О закономерностях опускания более плотных вод по гладкому склону океана. // Океанология, 1997, т. 37, № 4, с. 513-516.
8. *Самолюбов Б.И.* Придонные стратифицированные течения. – М.: Научный мир, 1999. – 464 с.
9. *Baines P.G., Condie S.* Observations and modelling of Antarctic downslope flows: A review // Ocean, Ice, and Atmosphere: Interactions at the Antarctic Continental Margin. Antarct. Res. Ser. / eds. by S. Jacobs, R. Weiss. – Washington, D. C., 1998, vol. 75, p. 29-49.
10. *Denbo D.W. and Skylligstad E.D.* An ocean Large-eddy simulation model with application in the Greenland Sea Journal of Geophysical Research, 1996, v. 101, no. C1, p. 1095-1110.