

*Н.С. Царькова*

### **ТЕХНОЛОГИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ПЕРЕНОСА ВЗВЕШЕННЫХ ВЕЩЕСТВ ВОДНЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ НА ПРИМЕРЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ДНОУГЛУБИТЕЛЬНЫХ РАБОТ В ЛУЖСКОЙ ГУБЕ ФИНСКОГО ЗАЛИВА**

*N.S. Tsarkova*

### **MODELING OF PROCESS OF TRANSFER OF THE WEIGHED SUBSTANCES WHEN CARRYING OUT DREDGING WORKS IN THE LUGA BAY OF THE GULF OF FINLAND**

*Даётся описание технологии моделирования распространения взвешенных веществ, основанной на аналитическом решении уравнения переноса для заданного поля скоростей течений. Приводится программный алгоритм решения поставленной задачи. Показываются результаты расчетов распространения полей мутности, выполненных на основании исходного поля скоростей, измеренного в пределах акватории Морского торгового порта Усть-Луга. Результаты проведенных исследований могут быть использованы при решении задач прогноза воздействия взмучивания донных отложений на водный объект.*

*Ключевые слова: технология моделирования, аналитическое решение, уравнение переноса, водный объект, взвешенные вещества, поля мутности, дноуглубительные работы, Морской торговый порт Усть-Луга.*

*The description of the developed model of distribution of fields of the weighed substances from dredging works on the data received during environmental monitoring is given. The measured fields of speeds of currents are the basis for model of theoretical calculations. The method of measurement of a divergention of horizontal speeds of currents was developed, and supervision of this parameter within the water area of the Sea trade port of Ust-Luga was made. Calculations of distribution of the fields of turbidity during the dredging works were made on the basis of new methodical approach, for the solution the problem of transfer (the transfer equation, or the continuity equation), which will help to forecast the anthropogenic impact on water object.*

*Key words: the water object, the weighed substances, transfer, model.*

Задача моделирования процессов переноса и распространения взвесей возникла в связи с оценкой масштаба их распространения при проведении дноуглубительных работ в пределах акватории Лужской губы, характеризующейся высокой степенью экологической уязвимости [1, 2].

В настоящее время методика прогнозирования распространения полей мутности разбивается на два этапа [3, 4]. Это — численные расчеты ожидаемых полей скоростей течений в проектируемом районе производства дноуглубительных работ, и последующие расчеты распространения полей мутности.

Точность таких расчетов определяется, главным образом, объективностью априорной информации, принимаемой за исходные данные при расчетах полей скоростей течений.

Альтернативная технология решения поставленной задачи заключается в измерении реальных полей скоростей течений в районе проведения дноуглубительных работ с последующими расчетами процесса распространения полей мутности.

Технология моделирования процесса переноса включает следующие этапы:

- аналитическое решение уравнения переноса;
- обработка данных измеренного поля скоростей течений;
- расчет развития полей мутности во времени;
- анализ и представление результатов.

Использование при расчетах результатов аналитического решения уравнения переноса имеет явные преимущества по сравнению с численными методами расчетов.

#### *Аналитическое решение уравнения переноса*

Процесс распространения смесей в водном объеме происходит как собственно за счет переноса взмученных веществ существующими течениями, так и за счет диффузии.

Так как скорости течений значительно меньше скорости распространения звука в воде, то полагаем, что фоновая, нормальная плотность воды постоянна, но изменяется при наличии взвеси. Процессами молекулярной диффузии также пренебрегаем, потому что они крайне медленны в масштабах времени перемещения взвесей.

В данном решении также пренебрегается возможностью возникновения конвективных течений вследствие достижения некоторых критических градиентов концентрации плотности. В глобальном смысле, линейные размеры полей мутности значительно превосходят вертикальные, поэтому возникновение конвективных течений указанной природы маловероятно.

При этих условиях уравнение переноса запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot F = 0, \quad (1)$$

где  $C$  — концентрация взвешенных веществ;  $F$  — вектор плотности потока концентрации:  $F = Cu$ ;  $u$  — вектор скорости;  $\nabla$  — оператор «набла».

Уравнение (1) выражает закон сохранения массы в любом потоке. Приток или сток некоторого количества взвесей в данную точку соответствует скорости изменения концентрации этих взвесей во времени.

Перепишем уравнение (1) в параметрах скорости и концентрации:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + C \nabla \cdot u + u \cdot \nabla C = 0. \quad (2)$$

Скорость гравитационного осаждения  $u_z^g$  не зависит от собственно процесса переноса и координат, поэтому положим:

$$u_z = \dot{u}_z + u_z^g, \quad (3)$$

где  $\dot{u}_z$  — вертикальная компонента скорости течения.

Если эта компонента равна нулю, что обычно и возникает на практике, то вертикальная компонента скорости будет определяться скоростью гравитационного осаждения взвесей, которую удобнее всего рассчитывать по формуле:

$$u_z^g = \sqrt{\frac{d(\rho_v - \rho)g}{\xi\rho_v}}, \quad (4)$$

где  $d$  — диаметр частиц;  $g$  — ускорение свободного падения;  $Re$  — число Рейнольдса;  $\rho$ ,  $\rho_v$  — плотность воды и взвеси.

Сразу заметим: в случаях, когда полагают, что вертикальная компонента равна нулю, в выражении (2) для дивергенции скорости необходимо использовать только горизонтальные компоненты.

В предположении, что скорости во времени не изменяются, преобразование Фурье в частотной области от левой и правой части (2) запишется в следующем виде:

$$i2\pi f C_f + C_f \nabla \cdot u + u \cdot \nabla C_f = 0, \quad (5)$$

где  $f$  — частота;  $i$  — мнимая единица;  $C_f$  — спектр концентрации.

Уравнение (3) решаем методом Фурье, полагая, что:

$$i2\pi f C_f + C_f \nabla \cdot u + u \cdot \nabla C_f = 0, \quad (6)$$

Подставляя соотношение (6) в (5), и выполнив элементарные преобразования, получаем:

$$\frac{u_x}{X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{u_y}{Y} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{u_z}{Z} \frac{\partial Z}{\partial z} = -(i2\pi f + \nabla \cdot u) = -\alpha_f \equiv const. \quad (7)$$

Правая часть этого выражения является определенной константой для любой заданной частоты. Если зафиксировать две координаты, например,  $z$ ,  $y$ , а изменять третью ( $x$ ), то для данной частоты, должно сохраняться некоторое значение  $\alpha_f$ . Эквивалентным образом, это условие можно записать в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial x} = -\alpha_f \frac{X}{u_x} \\ \frac{\partial Y}{\partial y} = -\alpha_f \frac{Y}{u_y} \\ \frac{\partial Z}{\partial z} = -\alpha_f \frac{Z}{u_z} \end{cases} \text{ решение } \begin{cases} X = X_0 e^{-\alpha_f \frac{x}{u_x}} \\ Y = Y_0 e^{-\alpha_f \frac{y}{u_y}} \\ Z = Z_0 e^{-\alpha_f \frac{z}{u_z}} \end{cases}$$

Подставляя данные решения в (6) окончательно получим:

$$C_f = C_{0f} e^{-(i2\pi f + \nabla \cdot u)(t_x + t_y + t_z)},$$

$$t_x = \frac{x}{u_x}; t_y = \frac{y}{u_y}; t_z = \frac{z}{u_z}, \quad (8)$$

где  $C_{0f}$  — спектр начальной концентрации в некоторой заданной точке.

Отметим, что компоненты вектора скорости являются инвариантами, тогда как составляющие  $x, y, z$  зависят от выбора системы координат. В уравнении (8) предполагается, что начало координат расположено в точке, где возникла аномальная концентрация. Следовательно, каждая спектральная компонента аномальной концентрации в некоторой точке экспоненциально убывает с расстоянием от этой точки, в зависимости от скорости потока и дивергенции скорости.

Заметим, что в решении (8) могут возникнуть сингулярности в случае равенства нулю одной из компонент скорости, или двух одновременно. Вернувшись к исходному преобразованию (7), мы видим, что эти члены просто обращаются в ноль, следовательно, и соответствующие локальные времена должны полагаться равными нулю.

Переход от решения (8), справедливого в частотной области, к временной, выполняется элементарно. Необходимо задать спектр аномальной концентрации в некоторой заданной точке, и выполнить обратное преобразование Фурье от (8).

Рассмотрим важные частные случаи.

Предположим, что начиная с некоторого момента времени, в некоторой точке возникает аномальная концентрация  $C_0$ , которая поддерживается на этом уровне в течение длительного времени.

Такой процесс во времени можно описать с помощью функции включения Хэвисайда, спектр которой выглядит следующим образом:

$$C_{0f} = C_0 \left[ \frac{1}{2} \delta(f) - \frac{i}{2\pi f} \right], \quad (9)$$

где  $\delta(f)$  — дельта-функция.

Подставим это выражение в (8) и выполним обратное преобразование Фурье.

$$C_t = C_0 e^{-\nabla \cdot u_0(t_x + t_y + t_z)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} \delta(f) - \frac{i}{2\pi f} \right] e^{-i2\pi f(t_x + t_y + t_z)} e^{i2\pi f t} df. \quad (10)$$

Здесь экспоненциальный множитель с локальными временами отвечает за смещение во времени, и решение для данного случая запишется в следующем виде:

$$C_t(\mathbf{r}) = C_0(\mathbf{r}_0) \sigma(t - t_{r0}) e^{-t_r \nabla \cdot u_0} + C_b,$$

$$t_{r0} = \left| \frac{x - x_0}{u_{0x}} \right| + \left| \frac{y - y_0}{u_{0y}} \right| + \left| \frac{z - z_0}{u_{0z}} \right|, \quad (11)$$

где  $\sigma(t - t_0)$  — функция включения Хэвисайда в точке;  $C_b$  — фоновая концентрация.

Из решения следует, что если дивергенция скорости в точке возникновения аномальной концентрации равна нулю, то взвеси переносятся по направлению вектора скорости  $u_0$  без изменения концентрации. Если дивергенция скорости больше нуля, то взвеси переносятся с уменьшением концентрации (разбавление), в противном случае концентрация возрастает при переносе.

Отметим, что решение (11) локально и выполняется на траектории, вдоль которой скорость  $u_0$  неизменна.

В приведенном примере, в точке  $r_0$  концентрация  $C_0$  поддерживалась на заданном уровне «извне», что не соответствует практике. Поэтому положим, что начиная с некоторого момента времени, концентрация в этой точке нарастает с постоянной скоростью  $C_{0t}$ . Из предыдущего изложения очевидно следует, что экспоненциальный множитель с локальными временами определяет смещение задаваемого сигнала во времени. Соответственно обратное преобразование Фурье определит этот сигнал, смещенный на время  $t_{r_0}$ . Поэтому сразу запишем решение во времени для данного случая.

$$C_t(r) = C_{0t}(r_0)t\Pi_T(t - t_{r_0} - T)e^{-t_r \nabla \cdot u_0} + C_b, \quad (12)$$

где  $2T$  — интервал времени, в течение которого действует источник с заданной производительностью  $C_{0t}$ ;  $\Pi_T(t)$  — прямоугольная селектирующая функция, которая определяется следующим образом:

Решение (12) для этого случая, в отличие от (11), уже будет зависеть от соотношения величины  $C_{0t}$ , скорости, и величины дивергенции скорости.

В соответствии с (7) определим величину  $dt_{r_0}$ , то есть, будем рассматривать элементарный объем  $dx_0 dy_0 dz_0$  вокруг источника взвесей. Предположим, что скорость течения, и дивергенция скорости в этой точке таковы, что некоторая концентрация  $C_{0c}$  в ней сохраняется постоянной во времени, что выполняется при условии:

$$dt_{r_0} \nabla \cdot u_0 = \frac{\ln(dt_{r_0} C_{0t}(r_0))}{C_{0c}(r_0)}. \quad (13)$$

Если левая часть этого соотношения больше правой, то поступающая взвесь быстро выносится из источника, и концентрация будет сохраняться на уровне фоновой.

В случае, когда левая часть (13) будет меньше правой, поступающая взвесь будет заполнять собой прилегающее пространство.

Для первых двух случаев взвесь будет перемещаться по некоторой траектории. В предположении, что скорости не изменяются во времени, эта траектория будет совпадать с линиями тока. Если допустить, что на всей траектории от точки  $r_0$  до точки  $r_1$  взвеси нигде не накапливаются (первые два случая), то решение (13) можно обобщить.

$$C_t(r_1) = C_{0t}(r_0) t \int_{r_0}^{r_1} \Pi_T \left( t - \frac{t_r}{2} \right) e^{-tr^{\nabla} u} \frac{u \cdot dr}{|u||dr|} + C_b. \quad (14)$$

Причем здесь интегрирование ведется вдоль линий тока, отвечающих уравнению:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \quad (15)$$

В случае, когда скорость поступления взвесей меньше скорости выноса, последние будут заполнять некоторый объем до тех пор, пока не наступит динамическое равновесие — поток выноса взвесей через поверхность этого объема станет равным потоку из источника. Математически это условие выражается в следующем виде.

$$C_{0t}(r_0) t \Pi_T \left( t - \frac{dt_r}{2} \right) e^{-dt_r^{\nabla} u_0} = \int_{S_0} C_{S_0}(r) \frac{u \cdot dS_0}{|u||dS_0|}, \quad (16)$$

где  $dS_0(r)$  — единичный вектор нормали к элементу поверхности  $dS_0$ .

Аналогичное условие равенства потоков, за вычетом количества осевших взвесей, должно выполняться и для некоторой точки  $r_1$ , лежащей на траектории  $r_0 \div r_1$ .

$$\int_{S_0} C_{S_0}(r) \frac{u \cdot dS_0}{|u||dS_0|} - \int_{t_0}^{t_1} C_t(r) \frac{z}{u_z^g} dt_r = \int_{S_1} C_{S_1}(r_1) \frac{u \cdot dS_1}{|u||dS_1|}. \quad (17)$$

Следовательно, в данном случае, вместо траектории мы уже будем иметь трубку тока, с начальным и конечным сечениями  $S_0, S_1$ . Внутри этой трубки будет проходить линия тока, соединяющая точки  $r_0, r_1$ .

Таким образом, формулы (12, 14, 15) совместно с условиями (16, 17) являются решением поставленной задачи.

### *Исходные данные и их предварительная обработка*

Все измерения скоростей выполнялись измерителем течений «Вектор-2», который измеряет две ориентированные горизонтальные компоненты скорости.

Как следует из приведенного решения, большое значение имеет представление о величинах дивергенции скорости в Лужской губе. Из простых физических соображений вытекает, что дивергенция скорости должна быть равна нулю.

Для оценки величины дивергенции, была изготовлена установка из двух, параллельно ориентированных измерителей «Вектор-2», с помощью которой были проведены измерения в нескольких точках. В десяти процентах случаев дивергенция не равнялась нулю в пределах погрешности измерений, откуда следует вывод, что дивергенцией скорости пренебрегать нельзя.

Полевые измерения скоростей велись параллельно с другими работами, связанными с мониторингом, и пункты наблюдений согласовывались с заказчиком, в связи с чем сеть пунктов наблюдений оказалась неравномерной (рис. 1, 2). Отдельно измерялась скорость в источнике — проектируемом месте ведения дноуглубительных работ.

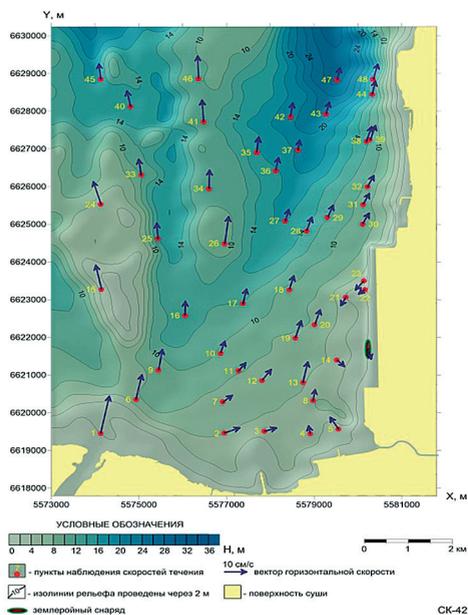


Рис. 1. Скорости и направления течений в поверхностном горизонте

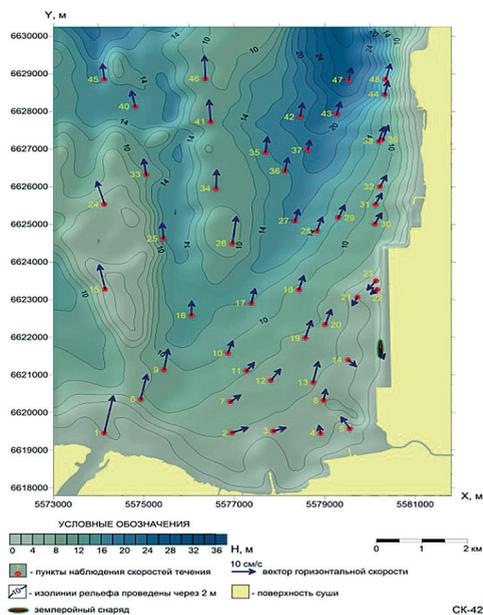


Рис. 2. Скорости и направления течений в придонном горизонте

На этапе предварительной обработки данные, полученные по нерегулярной сети наблюдений, интерполировались сплайнами на прямоугольную сеть  $100 \times 100$  м.

Каждая точка исходных данных смещалась в случайном направлении на относительное расстояние, пропорциональное модулю вектора скорости. Этот результат вторично интерполировался на прямоугольную сеть  $100 \times 100$  м. Разница между двумя результатами принималась за величину дивергенции скорости.

### Численная реализация

Исходные данные:

- поле скоростей течений;
- координаты источника взвесей, скорость течения, и производительность источника ( $C_{0T}$ ).

Алгоритм расчета:

- строится траектория движения в заданном поле скоростей: от источника до выхода за границы заданного планшета съемки;

- рассчитывается динамическое сечение равновесия потоков в источнике;
- по образующей сечения строится поверхность трубки тока до следующей точки найденной траектории, и находится площадь сечения трубки в этой точке;
- рассчитывается динамическое сечение равновесия потоков в этой точке и сравнивается с сечением трубки тока: если сечение трубки больше динамического сечения, то за основу построения следующей трубки тока выбирается это сечение, в противном случае — не изменяется;
- пункты 3–4 алгоритма повторяются для построения всех последующих трубок тока, вдоль найденной траектории перемещения взвесей;
- рассчитываются концентрации взвесей внутри всех найденных трубок тока, с учетом разрывов сечений на сопряжениях.

### Анализ результатов

На рис. 3, 4 приведены результаты расчетов полей мутности, распространяющихся через 35 и 62 ч после начала ведения дноуглубительных работ.

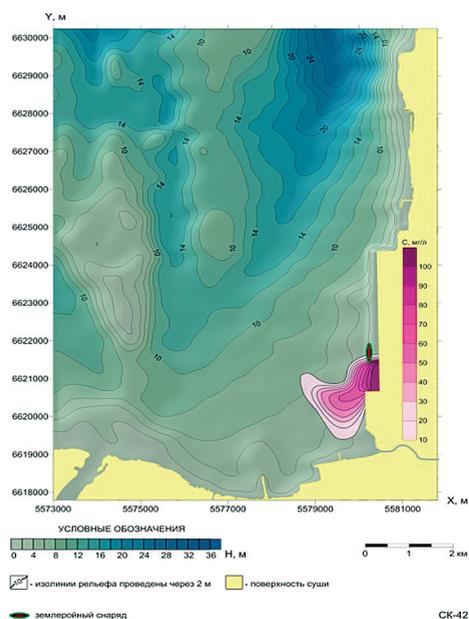


Рис. 3. Распространение полей мутности при проведении дноуглубительных работ через 35 ч работы

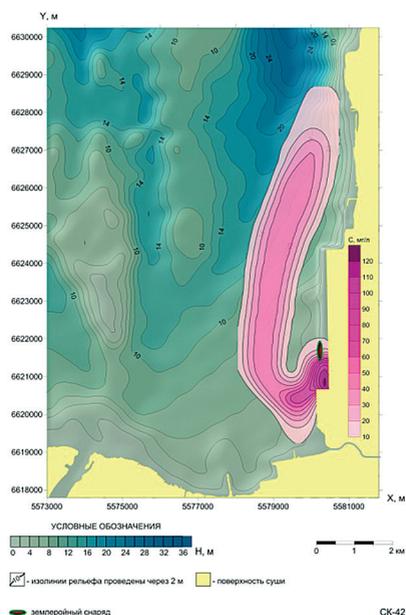


Рис. 4. Распространение полей мутности при проведении дноуглубительных работ через 62 ч работы

На практике, величина предельно допустимой концентрации взвесей составляет 10 мг/л. По этой изолинии, площади полей мутности через 20, 35 и 62 ч после начала их развития составили соответственно 1,31, 3,58 и 14,22 км<sup>2</sup>, средняя скорость приращения площади распространения поля мутности составляет 0,1 км<sup>2</sup>/час. Таким

образом, можно рассчитать среднее приращение площади поля мутности после 62 ч начала ведения дноуглубительных работ на любой последующий момент времени.

### ***Выводы***

Получено строгое аналитическое решение уравнения переноса, которое может применяться в любой области, где необходимо рассчитать распространение взвесей в поле заданных скоростей и источников.

На примере ведения дноуглубительных работ в пределах акватории Лужской губы показана эффективность технологии моделирования процесса распространения взвесей.

### ***Литература***

1. *Мандрыка О.Н., Шилин М.Б., Коузов С.А., Лукьянов С.В.* Современное состояние, разнообразие и уязвимость сообществ Кургальского рифа. // Ученые записки РГГМУ, 2013, № 31, с. 104–119.
2. *Шилин М.Б., Погребов В.Б., Лукьянов С.В., Мамаева М.А., Леднова Ю.А.* Экологическая уязвимость береговой зоны восточной части Финского залива к дреджингу. // Ученые записки РГГМУ, 2012, № 25, с. 107–122.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. Теоретическая физика. Т. VI, 3-е изд. перераб. и доп. — М.: «Наука», 1986.
4. *Гулд Х., Тобочник Я.* Компьютерное моделирование в физике. В 2-х частях. Часть 2: Пер. с англ.: А.Н. Полюдова, В.А. Панченко. — М.: Мир, 1990. — 400 с.