А.И. Альхименко, Н.Н. Загрядская, С.Г. Калинин

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВЗВЕСЕЙ ПРИ ДНОУГЛУБЛЕНИИ

A.I. Alkhimenko, N.N. Zagryadskaya, S.G. Kalinin

NUMERICAL SIMULATION OF SUSPENDED PARTICLES UNDER DREDGING OPERATIONS

Статья посвящена численному моделированию распространения мутности при дноуглублении. Показано численное решение задачи в одномерном, двумерном и трехмерном случаях методом переменных направлений.
Ключевые слова: численное моделирование, мутность, дноуглубление.

The numerical simulation of distribution suspended particles under dredging operations is analyzed in this article. The solution of the problem is shown in one-dimensional, two-dimensional and three-dimensional cases by the method of alternating directions.
Key words: numerical simulation, suspended material, dredging.

Определение распространения мутности (взвеси) при дноуглублении и дампинге (подводном отвале грунта) в водной среде представляет собой сложный процесс, при описании которого необходимо учитывать множество факторов, главным из которых обычно считается механический (перенос движущимися водами). Механический перенос в свою очередь может быть разделен на две составляющих: перенос, обусловленный полем осредненных скоростей течений и перенос, вызванный наличием в поле скорости случайных хаотических составляющих (диффузия).

Основной количественной характеристикой поля примеси в жидкости является концентрация C. С течением времени ее распределение в жидкости меняется. Изменение концентрации происходит также за счет переноса жидкости со скоростью течения и за счет турбулентной диффузии примеси [2, 5, 6].

Турбулентный поток мутности (облака взвешенных частиц грунта) пропорционален градиенту средней концентрации взвеси с коэффициентом пропорциональности, носящим название коэффициента турбулентной диффузии. Осредненное уравнение переноса взвеси для несжимаемого потока в случае пренебрежения молекулярной диффузией приводит к уравнению для концентрации [2]:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+U_i\frac{\partial C}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{i,j}\frac{\partial C}{\partial x_j}\right), \tag{1}$$

где C — осредненная концентрация диффундирующего вещества, в нашем случае — взвеси; $K_{i,j}$ — тензор коэффициентов турбулентной диффузии; U_i — компоненты скорости вдоль координатных осей x_i.

Уравнение (1), носящее название полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии, получило широкое применение при решении различных задач о распространении примесей в водной и воздушной среде.

Для решения уравнения (1) необходимо знать величину коэффициентов $K_{i,j}$. В работах по океанологии обычно пренебрегают недиагональными компонентами тензора $K_{i,j}$ [6] и полагают

$$K_{xy} = K_{yx} = K_{xz} = K_{zx} = K_{yz} = K_{zy} = 0, \quad K_{xx} = K_x, \quad K_{yy} = K_y, \quad K_{zz} = K_z.$$

По вопросу о значениях коэффициентов турбулентной диффузии в океане отсутствует единая точка зрения. Для определения численных значений коэффициентов диффузии проводились опыты в морях, в которых широко использовались красители [1]. На основании анализа диффузионных опытов, сделан вывод о зависимости коэффициентов K_x, K_y от масштаба диффузионного процесса и необходимости использования различных уравнений диффузии (с постоянными коэффициентами, с коэффициентами, связанными с масштабом явления линейной зависимостью или законом «четырех третей») для описания процессов турбулентного обмена разного масштаба. По исследованиям Озмидова [6], этот коэффициент для широкого диапазона масштабов (порядка 10–10000 км) с достаточной степенью точности можно полагать равным $PL^*/2$, где P — «скорость диффузии», а L^* — масштаб явления. При средних значениях $P = 1{,}5 \cdot 10-2$ м/с, полагаем $K_x = K_y = K_p = 0{,}75 \cdot 10-2L^*$ и считаем эти коэффициенты постоянными в рассматриваемом диапазоне времени. Значение L^* принимается в каждом конкретном случае в зависимости от масштаба рассматриваемого явления. В ряде случаев при решении задачи о распространении загрязнения можно пренебречь турбулентным обменом в вертикальной плоскости. На основании многочисленных исследований можно говорить о возможности описания процесса диффузии в гидросфере акваторий при решении большинства практических задач уравнением с постоянными коэффициентами, полагая $K_x = \text{const}$, $K_y = \text{const}$, $K_z = \text{const}$, что приводит к уравнению:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} + w\frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial C}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial C}{\partial z}\right), \tag{2}$$

где $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$ — компоненты осредненного поля скоростей течения вдоль декартовых осей x, y, z.

Система координат выбрана так, чтобы плоскость $z = 0$ совпадала со свободной невозмущенной поверхностью, ось z направлена вниз.

Левая часть уравнения за исключением $\partial C/\partial t$ представляет конвективный перенос массы, связанный с полем скорости жидкости, тогда как правая часть представляет неконвективный турбулентный перенос массы. Уравнение (2) описывает процессы диффузии и переноса для консервативных веществ без учета источника. Решение уравнения (2) проводится с начальными данными. При этом задается так называемый мгновенный источник загрязнения. Источники могут быть береговые (при дноуглублении), поверхностные (при дампинге), глубинные (при дноуглублении). Источник взвеси учитывается введением в правую часть уравнения (2) члена $Q(x, y, z, t)$, характеризующего интенсивность источника загрязнения, а именно, количество взвеси, поступающей в единицу времени на единицу объема акватории.

$$\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}+w\frac{\partial C}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial C}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial C}{\partial z}\right)+Q\left(x,y,z,t\right). \quad (3)$$

В случае мутности, распространяющейся по поверхности акватории, уравнение распространения становится двумерным и имеет вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial C}{\partial y}\right)+Q\left(x,y,t\right). \quad (4)$$

Типы источников могут быть самыми разнообразными, обычно рассматривают некоторые идеализированные типы.

Непрерывный точечный источник с удельной мощностью $Q\sigma$, действующий в точке (x^*, y^*, z^*), например, при работе дноуглубительных механизмов, описывается формулой:

$$Q\left(x,y,z,t\right)=Q\sigma\left(t\right)\delta\left(x-x^*\right)\delta\left(y-y^*\right)\delta\left(z-z^*\right),$$

где Q — масса взвеси, поступающая в точку (x^*, y^*, z^*) в единицу σ времени.

В численном счете такой источник моделируется как распределенный по площади одной сеточной ячейки (слагаемым $Q\sigma/\Delta x\Delta y$ в одном узле сетки, соответствующем точке (x^*, y^*)), для двумерного уравнения, и по одному элементарному сеточному объему ячейки (слагаемым $Q\sigma/\Delta x\Delta y\Delta z$ в одном узле сетки, соответствующем точке (x^*, y^*, z^*)).

Мгновенный точечный источник, когда примесь считается вводимой в водную среду в определенный момент времени t^* в точке (x^*, y^*, z^*),например, при разгрузке грунтоотвозящих шаланд. В этом случае

$$Q\left(x,y,z,t\right)=Q_{\text{г}}\left(t\right)\delta\left(t-t^*\right)\delta\left(x-x^*\right)\delta\left(y-y^*\right)\delta\left(z-z^*\right),$$

где $Q_{\text{г}}$ — масса грунта.

Береговые, поверхностные, донные источники учитываются при постановке граничных условий. Сама же разностная схема для уравнения диффузии (3), (4) не меняется.

Необходимые для решения уравнений диффузии (3), (4) граничные условия ставятся следующим образом. Пусть процесс распространения загрязнений рассматривается в области Ω, соответствующей изучаемой водной акватории. Область Ω имеет твердые границы (дно и береговую черту) и может содержать жидкие границы, через которые она соединяется с другими водными бассейнами.

Условия на границе области Ω могут быть разных типов. Пусть на границе находится источник примеси мощностью q, где q — известная функция, характеризующая количество примеси, поступающей в бассейн в единицу времени с единицы длины границы в двумерном случае, или единицы площади границы в трехмерном. В общем случае задаются смешанные граничные условия вида

$$v_n C = K_n \frac{\partial C}{\partial n} + q, \tag{5}$$

где n — внутренняя нормаль к границе области; V_n — нормальная составляющая скорости жидкости на границе; K_n — коэффициент диффузии в нормальном направлении; q — известная функция мощности источника примеси.

Функция q может характеризовать как источник примеси, так и поглощающие свойства границы (в этом случае $q < 0$), которые зависят от физических свойств диффундирующей примеси (взвеси) и от состава пород, образующих берег и дно водоема. Случай $V_n = 0$ соответствует полностью непроницаемой границе (береговая черта). На открытых участках акватории должна быть задана нормальная составляющая скорости V_n и возможный источник примеси. Если же диффузия примеси рассматривается вдали от границ области, тогда влиянием границ на процесс можно пренебречь, и задача решается с граничными условиями равенства нулю концентрации на бесконечно больших расстояниях от источника: $C|\infty = 0$.

Постановка начальных условий для уравнений (3), (4), если $Q = 0$, заключается в задании распределения концентрации примеси в момент $t = 0$, которое должно быть известно. Как показывают натурные наблюдения [1, 6], распределение концентрации в пятне мутности в начальный момент можно описать законом Гаусса, который отражает убывание концентрации с удалением от эпицентра выброса по экспоненциальному закону. В полярных координатах эта закономерность записывается следующим образом:

$$C(r,0) = C_0 \exp\left\{-r^2 / r_0^2\right\}. \tag{6}$$

где C_0 — начальная (максимальная) концентрация взвеси в точке выброса; r_0 — характерный радиус пятна.

Концентрация примеси в начальный момент времени определяется по формуле (6). Однако на практике обычно известно количество взвеси M и неизвестен характерный радиус пятна r_0. Считая известной начальную концентрацию C_0 в эпицентре, выведем зависимость между M, C_0 и r_0. Полагая вид пятна взвеси в виде круга, можно записать $M = \int_s Cds$, где ds — длина участка дуги окружности в пятне мутности: $ds = 2\pi rdr$, r — текущая полярная координата точки пятна. Учитывая (6), имеем:

$$M = C_0 \int_0^\infty e^{-r^2/r_0^2} \cdot 2\pi rdr = \pi C_0 \int_0^\infty e^{-r^2/r_0^2} dr = \pi C_0 r_0^2 e^{-r^2/r_0^2} \Big|_0^\infty = \pi C_0 r_0^2.$$

С учетом этого начальное распределения концентрации примеси можно записать в виде:

$$C(r,0) = C_0 \exp\left\{-\pi C_0 r^2 / M\right\}.$$

Отсюда очевидно, что для заданной массы M загрязняющего вещества (взвеси) малым значениям r_0 соответствуют большие C_0, что характеризует концентрированный залповый выброс загрязнения.

Таким образом, уравнения (3) и (4) вместе с граничными условиями (5) и начальными условиями типа (6) описывают процесс распространения мутности в рассматриваемой области на этапе турбулентной диффузии. Для решения краевой задачи (3)–(6) необходимо знать структуру течений в исследуемом районе. Скорости течений в морском бассейне могут быть получены на основе натурных, экспериментальных данных или расчетным методом [7].

При условии, что известны составляющие скорости течений и коэффициенты турбулентной диффузии, решение двухмерной краевой задачи (3)–(6) позволяет получить картину распределения концентрации взвеси вследствие ее взаимодействия с морской средой.

Трехмерное уравнение (3) позволяет описать движение так называемой динамически пассивной взвеси. Для описания поведения динамически активной взвеси, то есть обладающей отрицательной или положительной плавучестью в поле силы тяжести, необходимо несколько изменить уравнение (3) и ввести граничные условия на поверхности моря и на дне. Уравнение (3) тогда примет вид [1]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} + \left(w + w_c\right)\frac{\partial C}{\partial z} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial C}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial C}{\partial z}\right) + Q\left(x,y,z,t\right), \qquad (7)$$

где w_c — собственная гравитационная вертикальная скорость взвеси.

При решении уравнения (7) необходимо задать также граничные условия на поверхности и на дне моря. На поверхности моря при $z = 0$, при условии отсутствия взаимодействия взвеси с атмосферой, они имеют следующий вид [2]:

а) для динамически активной всплывающей взвеси

$$K_z \frac{\partial C}{\partial z} + w_c C + Q_1 = 0, \qquad (8)$$

б) для динамически активной оседающей взвеси

$$K_z \frac{\partial C}{\partial z} - w_c C + Q_1 = 0, \qquad (9)$$

в) для динамически нейтральной (пассивной) взвеси

$$K_z \frac{\partial C}{\partial z} + Q_1 = 0. \qquad (10)$$

Граничные условия на дне моря при $z = H(x, y)$ должны включать условия взаимодействия взвеси с дном:

а) для всплывающей взвеси

$$K_z \frac{\partial C}{\partial n} - \left(\beta_2 + w_c\right) C + Q_2 = 0, \tag{11}$$

б) для оседающей взвеси

$$K_z \frac{\partial C}{\partial n} - \left(\beta_2 - w_c\right) C + Q_2 = 0, \tag{12}$$

в) для пассивной взвеси

$$K_z \frac{\partial C}{\partial n} - \beta_2 C + Q_2 = 0, \tag{13}$$

где n — нормаль ко дну; Q_1 — соответствует сбросу грунта на поверхности океана при выгрузке шаланд; Q_2 — источник примеси расположен на дне, дноуглубление; β_2 — параметр, определяющий характер взаимодействия загрязняющей взвеси с морским дном. Обычно, параметру β_2 придаются два предельных значения:

а) $\beta_2 = 0$, соответствует полному отражению вынимаемого грунта от морского дна;

б) $\beta_2 \to \infty$, соответствует полному поглощению грунта морским дном.

Решение уравнения (7) с краевыми условиями (5), (8)–(12) позволяет получить картину распространения динамически активной и пассивной взвеси на любом горизонте в случае расположения источников взвесей как на берегах акваторий, так и на дне и на промежуточных глубинах при различных взаимодействиях ее с морским дном.

Существуют многочисленные аналитические решения различных задач диффузии взвеси в простейших условиях (для простых модельных областей и постоянных либо нулевых скоростей течений) [6].

Однако при изучении реальных процессов формирования зон мутности с учетом сложных полей течений и морфометрии бассейна невозможно получить аналитические решения уравнений (3), (7), описывающих распространение взвеси. В инженерной практике используются приближенные аналитические методы решения целого ряда относительно простых задач прогноза качества воды. Но при исследованиях процессов диффузионного переноса в естественных водоемах при переменных граничных условиях эти методы неприменимы.

Нами были рассмотрены выбор метода решения поставленной задачи, а также численные решения задачи в одномерном, двухмерном и трехмерном случаях методом переменных направлений.

Непосредственное решение двухмерного уравнения (4), а тем более трехмерного (7) численным методом приводит к довольно сложной линейной системе разностных уравнений высокого порядка. Трудности, связанные с двухмерной и трехмерной схемами, могут быть преодолены путем расщепления алгоритма решения на два или три полушага (треть шага) по времени, дающих в сумме продвижение на один шаг по времени.

Решение уравнений (4) и (7) осуществлено так называемым методом переменных направлений, или расщепления. Этот метод позволяет на каждом временном шаге сводить сложную задачу математической физики к последовательности простейших одномерных задач. В результате мы приходим к эффективному алгоритму реализации на компьютере, абсолютно устойчивому и обеспечивающему второй порядок аппроксимации решения как по пространственным переменным, так и по времени. При таком подходе интегрирование двухмерного уравнения (4) сводится к последовательному интегрированию уравнений более простой структуры. Основная алгоритмическая идея экономичности метода расщепления состоит в том, что для перехода со слоя tk на слой $tk+1$ надо решать трехточечные разностные уравнения сначала вдоль строк (по оси x-n раз), а потом вдоль столбцов (по оси y-m раз) разностной сетки. Где m и n размерность расчетной сетки вдоль координатных осей X и Y. Шаг по времени делится на два полушага, и одно разностное уравнение заменяется двумя.

В случае трехмерного уравнения (7) объем вычислений значительно возрастает, так как приходится решать двухмерную задачу на каждом слое по вертикали, а также решать одномерное уравнение диффузии в направлении оси $Z(m{\cdot}n)$ раз, при этом шаг по времени делится на 3.

Для решения одномерного уравнения турбулентной диффузии (14) применен эффективный метод исключения — метод прогонки [2]. В результате использования этого удалось отказаться от решения в ряде случаев большой системы линейных алгебраических уравнений, которая становится трехдиагональной, а в дальнейшем достаточно удобно перейти к решению двухмерного (4) и трехмерного уравнений турбулентной диффузии (3) на основе решения того же уравнения в одномерном варианте.

При применении метода прогонки для решения одномерного уравнения турбулентной диффузии произведен учет дрейфа пятна мутности.

Уравнение, описывающее случай поверхностного загрязнения взвесью узкого канала на интервале $[a, b]$, т.е. одномерную задачу, тогда имеет вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u(x)\frac{\partial C}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{14}$$

где $C(x, t)$ — концентрация диффундирующей взвеси; t — время; $u(x)$ — скорость дрейфа; K_x — коэффициент горизонтальной турбулентной диффузии.

Начальные условия зададим в виде:

$$C(x,0) = C_0 \exp\left\{-\left(x - x_0\right)^2 / r_0^2\right\}, \tag{15}$$

где x_0 — координата центра пятна мутности; r_0 — характерная полуширина загрязнения.

Это гауссовское распределение соответствует распространению мутности от мгновенного источника на стадии турбулентной диффузии спустя некоторое время с момента выброса.

Граничные условия ставятся следующим образом:

$$u_a C + K_x \frac{\partial C}{\partial x} = q \quad \text{при } x = a,$$
$$u_b C + K_x \frac{\partial C}{\partial x} = q \quad \text{при } x = b, \qquad (16)$$

где u_a, u_b — скорости течения на границах интервала $[a, b]$. Скорость течения $u(x)$ считается известной.

В области $\Omega = [a, b]$ введем пространственно-разностную сетку $wh\Delta t = \{(xi,tk)$: $xi = ih$, $0 \leqslant x \leqslant H$, $tk = k\Delta t$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $I = 0,1,...,N$, $k = 0,1,...,L$, $h = H/N$, $\Delta t = T/L\}$ с шагами h по x и Δt по t (H — длина интервала $[a, b]$, T — моделируемый промежуток времени).

Будем решать уравнение (14) методом конечных разностей. Для этого заменим область непрерывного изменения аргументов дискретным множеством точек (сеткой) и аппроксимируем на сетке дифференциальное уравнение разностным.

Введем следующие обозначения: $C_i^{(n)} = C(x_i, t_n)$, $u_i = u(x_i)$ — значения функций в узлах сетки; верхний индекс соответствует временному слою, нижний — пространственной координате. При построении конечно — разностного уравнения каждый член уравнения (14) может быть заменен разностными соотношениями различным образом, и возможные комбинации этих способов весьма многочисленны. Мы выбираем так называемую симметричную неявную схему Кранка-Николсона [8]. Она определена на шеститочечном шаблоне. Схема Кранка-Николсона имеет удвоенную точность по шагам по времени за счет того, что ее можно рассматривать как результат последовательного применения двух схем для половинных интервалов по времени, кроме того, эта схема абсолютно устойчива. Конечно-разностная схема уравнения (14) имеет вид:

$$\frac{C_i^{(n+1)} - C_i^{(n)}}{\Delta t} + u_i \frac{C_{i+1}^{(n)} - C_{i-1}^{(n)} + C_{i+1}^{(n+1)} - C_{i-1}^{(n+1)}}{4h} =$$
$$= K_x \frac{C_{i+1}^{(n)} - 2C_i^{(n)} + C_{i-1}^{(n)} + C_{i+1}^{(n+1)} - 2C_i^{(n+1)} + C_{i-1}^{(n+1)}}{2h^2}. \qquad (17)$$

Граничные условия в разностном представлении имеют вид:

$$\begin{cases} u_a \dfrac{C_0^{(n)} + C_0^{(n+1)}}{2} = K_x \dfrac{C_1^{(n)} - C_0^{(n)} + C_1^{(n+1)} - C_0^{(n+1)}}{2h} + q, \\ u_b \dfrac{C_N^{(n)} + C_N^{(n+1)}}{2} = K_x \dfrac{C_N^{(n)} - C_{N-1}^{(n)} + C_N^{(n+1)} - C_{N-1}^{(n+1)}}{h} + q, \quad n = 0,1,\ldots,L-1. \end{cases} \qquad (18)$$

В данной схеме для нахождения решения на следующем временном слое нельзя записать явную формулу, и на каждом шаге по времени применяется метод прогонки.

После ряда преобразований выражения (17) получим:

$$C_{i+1}^{(n+1)} + C_i^{(n+1)} \frac{4K_x \Delta t + 4h^2 + 2K\Delta t h^2}{u_i h\Delta t - 2K_x \Delta t} - C_{i-1}^{(n+1)} \frac{u_i h\Delta t + 2K_x \Delta t}{u_i h\Delta t - 2K_x \Delta t} =$$

$$= \frac{C_{i+1}^{(n)}\left(2K_x\Delta t - u_{i+1}h\Delta t\right) + C_i^{(n)}\left(4h^2 - 4K_x\Delta t - 2Kh^2\Delta t\right) + C_{i-1}^{(n)}\left(u_{i-1}h\Delta t + 2K_x\Delta t\right)}{u_i h\Delta t - 2K_x\Delta t},$$

это выражение можно представить в виде:

$$C_{i+1}^{(n+1)} + m_i C_i^{(n+1)} - n_i C_{i-1}^{(n+1)} = \hat{f}_i, \tag{19}$$

где

$$m_i = \frac{4K_x\Delta t + 4h^2 + 2k_i\Delta t h^2}{u_i h\Delta t - 2K_x\Delta t}, \quad n_i^x = \frac{u\, h\Delta t + 2K\ \Delta t}{u_i h\Delta t - 2K_x\Delta t},$$

$$\hat{f}_i = \frac{C_{i+1}^{(n)}\left(2K_x\Delta t_i - u_{i+1}h\Delta t\right) + C_i^{(n)}{}_x\left(4h^2 - 4K_x\Delta t - 2k\ h^2\Delta t\right) + C_{-1}^{(n)}\left(u_{-1}h\Delta t + 2K\ \Delta t\right)}{u_i h\Delta t - 2K_x\Delta t}.$$

Решив выражение (19) относительно $C_i^{(n+1)}$, получим

$$C_i^{(n+1)} = \frac{\hat{f}_i}{m_i} - \frac{C_{i+1}^{(n+1)}}{m_i} + \frac{n_i}{m_i} C_{i-1}^{(n+1)}. \tag{20}$$

Предположим, что с помощью полной системы из последнего уравнения исключена неизвестная $C_{i+1}^{(n+1)}$. Тогда это уравнение примет вид:

$$C_i^{(n+1)} = S_i\left(D_i - C_{i+1}^{(n+1)}\right), \tag{21}$$

где S_i, D_i ($i = 1,2,...,N-1$) — некоторые коэффициенты.

Отсюда

$$C_{i-1}^{(n+1)} = S_{i-1}\left(D_{i-1} - C_i^{(n+1)}\right). \tag{22}$$

Подставляя последнее выражение в уравнение (20), получим

$$C_{i+1}^{(n+1)} + m_i C_i^{(n+1)} - n_i S_{i-1}\left(D_{i-1} - C_i^{(n+1)}\right) = \hat{f}_i,$$

и следовательно,

$$C_i^{(n+1)} = \frac{\left(\hat{f}_i + n_i S_{i-1} D_{i-1}\right) - C_{i+1}^{(n+1)}}{m_i + n_i S_{i-1}}. \tag{23}$$

Сравнивая формулы (21) и (23), получим для определения S_i и D_i рекуррентные формулы:

$$S_i = \frac{1}{m_i + n_i S_{i-1}}, \quad D_i = \hat{f}_i + n_i S_{i-1} D_{i-1}, \quad (i = 1, \ldots, N-1). \tag{24}$$

Определим теперь S_0 и D_0. Из первого граничного условия (18) получаем:

$$C_0^{(n+1)} = -\frac{2qh - C_0^{(n)}\left(u_a h + K_x\right) + K_x C_1^{(n)} + K_x C_1^{(n+1)}}{u_a h - K_x},$$

с другой стороны при $i = 0$ имеем:

$$C_0^{(n+1)} = S_0\left(D_0 - C_1^{(n+1)}\right),$$

Сравнивая последние два равенства, находим:

$$S_0 = -\frac{K_x}{u_a h + K_x}, \quad D_0 = \frac{2qh - C_0^{(n)}\left(u_a h + K_x\right) + K_x C_1^{(n)}}{-K_x}. \tag{25}$$

На основании формул (24) последовательно определяются коэффициенты S_i, D_i ($i = 1, 2, \ldots, N-1$) до S_{N-1} и D_{N-1} включительно (прямой ход).

Обратный ход начинается с определения $C_N^{(n+1)}$. Используя второе граничное условие (18), получим для определения $C_N^{(n+1)}$ выражение:

$$C_N^{(n+1)} = \frac{u_b h C_N^{(n)} - K_x C_N^{(n)} + K_x C_{N-1}^{(n)} + K_x S_{N-1} D_{N-1} - 2qh}{K_x\left(S_{N-1} + 1\right) - h u_b}. \tag{26}$$

Теперь по формуле (21) последовательно находим $C_{N\text{-}1}^{(n+1)}$, $C_{N\text{-}2}^{(n+1)}$, $C_{N\text{-}3}^{(n+1)}$, $C_0^{(n+1)}$. Таким образом, концентрация диффундирующей субстанции будет определена во всех точках заданной области.

Двухмерная задача поверхностной диффузии в области, ограниченной береговой линией и, возможно, имеющей открытые границы и водообмен с соседними бассейнами, решается с учетом дрейфа пятна мутности в поле течений. Процесс диффузии в этих условиях описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных, а именно:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u(x,y)\frac{\partial C}{\partial x} + v(x,y)\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial C}{\partial y}\right) + Q(x,y,t), \tag{27}$$

где $C(x, y, t)$ — Концентрация взвеси; t — время; $u(x, y)$, $v(x, y)$ — горизонтальные составляющие скорости течения вдоль декартовых координат x, y; K_x, K_y — коэффициенты горизонтальной турбулентной диффузии; Q — функция мощности источника.

Начальные условия задаются в виде:

$$C(x,y,0) = C_0 \exp\left\{-\left[\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2\right] / r_0^2\right\}, \tag{28}$$

где (x_0, y_0) — координаты центра пятна мутности; r_0 — характерный радиус пятна.

Характерный радиус пятна определяется исходя из массы поступившей взвеси M, которая обычно известна. Это соответствует распространению взвеси от мгновенного точечного источника и используется, если $Q = 0$ в уравнении (27).

Граничные условия ставятся следующим образом:

$$v_n C = K_n \frac{\partial C}{\partial n} + q, \tag{29}$$

где n — внутренняя нормаль к границе области; v_n — нормальная составляющая скорости жидкости на границе; K_n — коэффициент диффузии в нормальном направлении; q — известная функция мощности источника взвеси.

При этом криволинейная граница области заменяется ломаной со звеньями, параллельными осям координат, на которых и ставятся граничные условия.

Как известно, [7], при решении двухмерного уравнения методом переменных направлений, схема записывается в виде двух полушагов по времени. На первом полушаге используется вариант дискретизации в направлении оси x:

$$\frac{C_i^{(n+1)} - C_i^{(n)}}{0{,}5 \times \Delta t} + u_i \frac{C_{i+1}^{(n)} - C_{i-1}^{(n)} + C_{i+1}^{(n+1)} - C_{i-1}^{(n+1)}}{4h} = \\ = K_x \frac{C_{i+1}^{(n)} - 2C_i^{(n)} + C_{i-1}^{(n)} + C_{i+1}^{(n+1)} - 2C_i^{(n+1)} + C_{i-1}^{(n+1)}}{2h^2}, \tag{30}$$

а на втором, соответственно, вдоль оси y:

$$\frac{C_j^{(n+1)} - C_j^{(n)}}{0{,}5 \times \Delta t} + v_j \frac{C_{j+1}^{(n)} - C_{j-1}^{(n)} + C_{j+1}^{(n+1)} - C_{j-1}^{(n+1)}}{4h} = \\ = K_y \frac{C_{j+1}^{(n)} - 2C_j^{(n)} + C_{j-1}^{(n)} + C_{j+1}^{(n+1)} - 2C_j^{(n+1)} + C_{j-1}^{(n+1)}}{2h^2}, \tag{31}$$

где K_x, K_y уменьшены в два раза. Предполагается равенство шагов расчетной сетки h вдоль осей x и y, что, в принципе, необязательно.

В выражениях (30), (31) для упрощения опущены вторые нижние индексы при переменных $C_{i,j}$, $u_{i,j}$ и $v_{i,j}$.

Граничные условия (29) могут быть записаны аналогично одномерной задаче (18), но мы здесь не будем их приводить.

Таким образом, решение двумерного уравнения турбулентной диффузии разбито на два этапа по времени. В случае разбиения расчетной области на M узлов вдоль оси x и на N узлов вдоль оси y, на первом этапе решается конечно-разностное уравнение (30) вдоль оси x — N раз, а на втором — уравнение (31) вдоль оси y — M раз.

Таким образом, метод переменных направлений позволяет достаточно просто перейти от решения одномерной (14) к решению двумерной (27), а также и к решению трехмерной задачи (7) об эволюции диффундирующей консервативной субстанции (взвеси), обладающей собственной вертикальной составляющей скорости, в трехмерном поле течений.

Трехмерное уравнение турбулентной диффузии динамически активной взвеси с учетом дрейфа пятна мутности в поле течений имеет вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}+\left(w-w_c\right)\frac{\partial C}{\partial z}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial C}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial C}{\partial z}\right)+Q\left(x,y,z,t\right). \qquad (32)$$

Как следует из уравнения (32), появляется составляющая вертикальной скорости осаждения примеси *wc*. Так как примесь может обладать и отрицательной плавучестью, то *wc* может принимать соответственно значения $wc < 0$, $wc = 0$ и $wc > 0$. При исследованиях мы должны знать величину скорости вертикального движения примеси в жидкости. Вследствие использования для решения уравнения (32) метода переменных направлений конечно-разностные выражения для горизонтальных слоев будут аналогичны приведенным выше (30), (31). Это относится и к выражениям, описывающим граничные условия как на вертикальных границах акватории, так на поверхности и дне акватории (8–13,18).

Разностная схема для вертикальной составляющей *z* имеет вид:

$$\frac{C_k^{(n+1)}-C_k^{(n)}}{\Delta t}+\left(w_l-w_c\right)\frac{C_{k+1}^{(n)}-C_{k-1}^{(n)}+C_{k+1}^{(n+1)}-C_{k-1}^{(n+1)}}{4h}=$$
$$=K_x\frac{C_{k+1}^{(n)}-2C_k^{(n)}+C_{k-1}^{(n)}+C_{k+1}^{(n+1)}-2C_k^{(n+1)}+C_{k-1}^{(n+1)}}{2h^2}+Q. \qquad (33)$$

Решение трехмерного уравнения турбулентной диффузии разбито на три этапа по времени. В случае разбиения расчетной области на M узлов вдоль оси x, на N узлов вдоль оси y и на Z узлов вдоль оси z, на первом этапе решается конечно — разностное уравнение (30) вдоль оси x — $N{\cdot}Z$ раз, на втором — уравнение (31) вдоль оси y — $M{\cdot}Z$ раз и на третьем — уравнение (33) $M{\cdot}N$ раз вдоль вертикальной оси z. Очевидно, что объем вычислений в случае решения трехмерной задачи существенно увеличивается, но в настоящее время это уже нельзя считать недостатком метода, так как ресурсы используемых в настоящее время ПЭВМ значительно возросли.

Полученные решения позволили разработать программное обеспечение для численных расчетов распространения пятен мутности при дноуглублении и дампинге [4]. Подобные расчеты являются обязательной частью ОВОС гидротехнических и дреджинговых проектов, осуществляемых в прибрежно-морской зоне [9–11].

Литература

1. *АльхименкоА.И., Шурыгин И.Г.* Результаты натурных исследований диффузии красителя под действием ветровых волн. // Труды Всесоюзного совещания «Чистое море», 1986, с. 87–94.
2. *Владимиров А.М. и др.* Охрана окружающей среды. — Л., 1991.
3. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1970.
4. *Загрядская Н.Н., Калинин С.Г.* Результаты численных исследований распространения облака мутности при дноуглублении и дампинге. // Научно-технические ведомости СПбГТУ, 2001, № 1.
5. *Караушев А.В.* Турбулентная диффузия и метод смешения. — Л.: Гидрометеоиздат, 1946.
6. *Озмидов Р.В.* Диффузия примесей в океане. — Л.: Гидрометеоиздат, 1986.
7. *Фельзенбаум А.И.* Теоретические основы и методы расчета установившихся морских течений. — М.: изд-во Академии Наук СССР, 1960.
8. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. Том 1. — М.: Мир, 1991.
9. *Шилин М.Б., Погребов В.Б., Лукьянов С.В., Мамаева М.А., Леднова Ю.А.* Экологическая уязвимость береговой зоны восточной части Финского залива к дреджингу. // Ученые записки РГГМУ, 2012, № 25, с. 107–122.
10. *Шилин М.Б., Еремина Т.Р., Мамаева М.А.* Дреджинг наводит мосты. В кн.: Экологические аспекты дреджинга. — СПб.: РГГМУ, 2013, с. 427–435.
11. *Chusov A.N., Lednova J., Shilin M.* Ecological Assessment of Dredging in the Eastern Gulf of Finland. // Print ISBN: 978-1-4673-1413-8, DOI: 10.1109/Baltic:2012.6249169 / ISSN 2150-6027: pp. 1–4.