В.Н. Веретенников

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА С НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКОЙ ДЛЯ РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ ДЛИННОЙ ВОЛНЫ В БУХТЕ

V.N. Veretennikov

DIFFERENCE SCHEMES WITH NON-UNIFORM GRIG FOR CALCULATION OF WAVES OF WAVELENGTHS IN COVE

Разностная схема с неравномерной сеткой интерпретируется как схема с применением растяжения координат; это позволяет показать, что она имеет второй порядок точности. Эта схема используется для численного решения задачи расчета колебаний длиной волны в бухте, причем шаг сетки быстро меняется около побережья. При расчете распространения длиной волны в бухте хорошие результаты дает неравномерная сетка, в которой отношение двух соседних шагов сохраняет постоянное значение.

Ключевые слова: разностная схема, неравномерная сетка, длинная волна, теория мелкой воды, параметр Кориолиса, порядок точности, растяжение координат, ошибки аппроксимации, граничное условие, закон сохранения энергии, относительная погрешность.

Difference scheme with non-uniform grid is interpreted as a circuit using a stretching coordinates, it is possible to show that it has a second order accuracy. This scheme is used for the numerical solution of the problem of calculating oscillation wavelength in the bay, and the grid is changing rapidly near the coast. When calculating the propagation wavelength in the bay gives good results non-uniform grid in which the ratio of two adjacent steps is kept constant.

Key words: finite-difference scheme, a non-uniform grid, long wave theory of shallow water, the Coriolis parameter, the accuracy, stretching coordinate approximation error, the boundary condition, the law of conservation of energy, the relative error.

При численном решении двумерных задач для дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих распространение длинных волн в областях со сложной геометрией, можно получить достоверный ответ только в том случае, если использовать алгоритмы, адаптирующиеся к картине движения волн. Процесс распространения двумерных волн в бассейне настолько сложен, что очень редко удается создавать его универсальную теорию, действующую на всех участках рассматриваемого процесса и в любой момент времени. Вместо этого можно посредством экспериментов постараться понять основные факторы, которые в тот или иной отрезок времени управляют процессом на том или ином участке.

Рассмотрим два бассейна, которые сообщаются друг с другом вдоль плоскости $y = 0$. Предположим, что глубина первого бассейна (океана) равна h_1, а глубина второго бассейна (бухты) равна h_2.

В рамках линейной теории мелкой воды распространение волн описывается системой уравнений соответственно для первого ($i = 1$) и второго ($i = 2$) бассейнов.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \ell v_i = -g\frac{\partial \varsigma_i}{\partial x}, \frac{\partial v_i}{\partial t} + \ell u_i = -g\frac{\partial \varsigma_i}{\partial y}, \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{1}{h_i}\frac{\partial \varsigma_i}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

где $u = u(x; y; t)$, $v = v(x; y; t)$ – скорости; $\varsigma(x; y; t)$ – превышение уровня жидкости над её равновесным положением; ℓ – параметр Кориолиса; g – ускорение свободного падения.

В качестве начальных данных выберем:

$$u = u^{(0)}(x;y), \quad v = v^{(0)}(x;y), \quad h = h(x;y) \text{ при } t = 0. \quad (2)$$

Функции $u^{(0)}$ и $v^{(0)}$ можно выбрать произвольно, лишь бы они были связаны зависимостью:

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} = -\frac{1}{h}\frac{\partial \varsigma}{\partial t}.$$

Эти две системы уравнений объединяются граничными условиями, которые должны соблюдаться во всех точках оси Ox:

$$\varsigma_1(x;0) = \varsigma_2(x;0), \quad (3)$$

$$h_1(x;0)\cdot v_1(x;0) = h_2(x;0)\cdot v_2(x;0). \quad (4)$$

Необходимо задать граничное условие на фиктивной границе Γ_1 океана, проходя через которую волна не теряет энергию

$$h_1\frac{\partial \varsigma_1}{\partial n} = q \text{ на участке } \Gamma_1 \text{ границы.} \quad (5)$$

Экономичная разностная схема (схема расщепления, основанная на одномерной неявной схеме), эффективно реализуемая на ЭВМ, для аналогичной задачи была построена в работе [1]. Особенностью этой работы было использование неравномерной пространственной сетки. Это связано с необходимостью повышения точности, для чего, например, имеет смысл дробить сетку вблизи берегов.

Способ построения сетки с переменным шагом, использованный в работах [1, 2, 3] является типичным для конечно-разностных схем, применяемых для расчета около побережья. В этом способе берется слабо меняющийся шаг сетки и поэтому требуется несколько сотен узлов перпендикулярно береговой черте. Цель данной статьи — показать, что разностная схема типа Кранка-Николсона с аналитически задаваемым расположением узлов сетки имеет тот же порядок точности и является более эффективной. Пусть узлы сетки расположены поперек береговой черте с переменным шагом, т.е. $hx_{i+1} = hx_1 + \Delta hx_{i+1/2}$, где $hx_1 = 0$ и $1 \leqslant i \leqslant n - 1$. В уравнения входят первые производные, которые нужно представить в конечно-разностном виде.

В настоящей разностной схеме с неравномерной сеткой используется подход, основанный на растяжении координат. Вводится новая координата ξ, для которой шаг сетки $\Delta\xi$ постоянен и которая связана с координатой hx соотношением вида:

$$hx_i = hx(\xi), \quad 1 \le i \le n. \tag{6}$$

Выражение для первой производной, включающее первый член ошибки аппроксимации записывается для новой координаты с применением центральных разностей:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \left(\frac{\partial u/\partial\xi}{dx/d\xi}\right)_i = \frac{\left(u_{i+1} - u_{i-1}\right)}{2\Delta\xi\left(dx/d\right)_i} + O\left(\Delta\xi^2\right). \tag{7}$$

Это выражение для производной можно использовать при решении основных уравнений, записанных для переменной ξ, причем $dx/d\xi$ находится из соотношения (6). В настоящем подходе производную $dx/d\xi$ нужно заменить конечно-разностным выражением:

$$\left(\frac{dhx}{d\xi}\right)_i = \frac{hx_{i+1} - hx_{i-1}}{2\Delta\xi} + O\left(\Delta\xi^2\right). \tag{8}$$

Подставляя формулу (8) в (7), получаем следующее разностное выражение:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial hx}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{hx_{i+1} - hx_{i-1}} + O\left(\Delta\xi^2\right).$$

Приведённое выражение показывает, что данная схема с неравномерной сеткой эквивалентна растяжению координат, проводимому по соотношению вида (6). Это соотношение используется для определения переменного шага в настоящей схеме и в то же время даёт связь между координатами при растяжении. Производные имеют второй порядок точности относительно шага $\Delta\xi$.

Для случая сетки с переменным шагом, заданным формулой:

$$\Delta hx_{i+\frac{1}{2}} = \eta\Delta hx_{i-\frac{1}{2}}, \quad 1 \le i \le n-1,$$

где $\eta = 1 + O(\Delta hx_{i-1/2})$, соотношение (6) можно взять в виде:

$$hx_i = hx_i \frac{\eta^{\xi_i/\Delta\xi_0} - 1}{\eta^{1/\Delta\xi_0} - 1}, \quad 1 \le i \le n,$$

где $\xi_i = (i-1)\Delta\xi$ и $\xi_n = 1$. Два параметра η и $\Delta\xi_0$ выбираются таким образом, чтобы получить желаемое расположение узлов.

Отсюда видно, что величина шага должна меняться медленно с тем, чтобы разностное выражение для первой производной ***локально*** сохраняло точность второго порядка.

Можно рассмотреть установившиеся колебания волны в бухте, которые описываются уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h_i\frac{\partial\varsigma_i}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h_i\frac{\partial\varsigma_i}{\partial y}\right)+k^2h_i\varsigma_i=0, \tag{9}$$

с граничным условием (5), где k – волновое число.

Высоту волны представим в виде суммы трёх составляющих:

$$\varsigma_2=\varsigma_H+\varsigma_{\text{O}}+\varsigma_{\text{P}}, \tag{10}$$

где $\varsigma_H=\varsigma_1$ – высота набегающей волны; ς_{O} – высота отраженной волны, получаемая при отражении плоской волны от береговой линии; ς_{P} – высота рассеянной волны, возникающей внутри бухты.

Высоту набегающей волны представим следующим образом:

$$\varsigma_H=a\cdot\exp\big(-ikr\cos(\theta-a)\big). \tag{11}$$

Известно, что поле рассеянных волн ς_{P} будет перемещаться из входа в бухту к границе Γ_1. Это обстоятельство можно описать условием излучения Зоммерфельда на границе, которое можно представить в приближенной форме:

$$\frac{\partial\varsigma_{\text{P}}}{\partial r}+ik\varsigma_{\text{P}}=0 \quad \text{на участке } \Gamma_1 \text{ границы.} \tag{12}$$

Используя условие (11), для суммарной высоты ς можно записать:

$$\frac{\partial\varsigma}{\partial r}+ik\varsigma=\frac{\partial\left(\varsigma_H+\varsigma_{\text{O}}\right)}{\partial r}+ik\left(\varsigma_H+\xi_{\text{O}}\right)=f. \tag{13}$$

В правой части этого уравнения находится известная функция f координат, угла, определяющего локальную геометрию, и угла набегания волны ς_H.

Включая это граничное условие в общую формулировку вариационного типа:

$$\int\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial\varsigma}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial\varsigma}{\partial y}\right)+k^2h\varsigma\right)\varsigma^*d\Gamma=$$
$$=\int_{\Gamma_1}\left(h\frac{\partial\varsigma}{\partial n}-q\right)\varsigma^*d\Gamma_1+\int_{\Gamma_2}h\left(\frac{\partial\varsigma}{\partial n}+ik\varsigma-f\right)\varsigma^*d\Gamma_2. \tag{14}$$

Откуда, интегрируя по частям, получаем:

$$\int_{\Gamma}\left(h\frac{\partial\varsigma}{\partial x}\frac{\partial\varsigma^*}{\partial x}+h\frac{\partial\varsigma}{\partial y}\frac{\partial\varsigma^*}{\partial y}-kh\varsigma\varsigma^*\right)d\Gamma=$$
$$=\int_{\Gamma_2}q\varsigma^*d\Gamma_2+\int_{\Gamma_1}h(f-ik\varsigma)\varsigma^*d\Gamma_1. \tag{15}$$

Это исходное соотношение, связанное с применением конечных элементов, в котором учтено граничное условие (12) на участке Γ_1 границы.

Численное интегрирование исходной системы проводилось на равномерной и неравномерной сетке, покрывающей прямоугольную область. Численные эксперименты на неравномерной сетке были проведены при следующих значениях параметров: $hx = hy = 4$ км для левой и $hx = hy = 2$ км для правой половины бухты $\tau = \{30, 60, 120, 240$ с$\}$, $h_1 = 20$ м, $h_2 = 10$ м, без учета и с учетом параметра Кориолиса. Анализ разностного аналога интегрального закона сохранения энергии для равномерной сетки показал, что изменение энергии так мало под влиянием свободных колебаний, что нет необходимости проводить расчет свыше полных 150 временных интервалов. В качестве «главного счета» для сравнения с последующими экспериментами на неравномерной сетке необходимо брать результаты расчета с параметрами $hx = hy = 1$ км, $\tau = 60$ с.

Для неравномерной сетки разделяющая линия помещена посередине сеточной области. Сеточные точки составляют 151 узел против 800 в главном счете. Энергия в этом случае согласуется со значениями энергии главного счета. Поля уровня на неравномерной сетке с учетом и без учета параметра Кориолиса достаточно хорошо совпадают между собой и с главным счетом.

Результаты расчета с переменной глубиной показали, что на разделяющей линии возможны «скачки» уровня и скорости. Для ослабления этого эффекта желательно выбирать шаги сетки hx_i и hx_{i+1} так, чтобы было выполнено условие $hx_i/\sqrt{gh_1} \approx hx_{i+1}/\sqrt{gh_2}$. В тех случаях, когда это удаётся сделать, указанный эффект скачков уровня и скорости практически удаётся устранить, что свидетельствует о повышении точности схемы на разделяющей линии. Отметим, что наибольших значений относительная погрешность (до 4 %) достигает на границе области, где больше пространственный шаг сетки, в основном же она колеблется в пределах до 1 %.

Литература

1. *Веретенников В.Н.* Численное моделирование длинных волн типа цунами в прямоугольной области. — В кн.: Распространение и набегание на берег волн цунами. — М.: Наука, 1981, с. 139–146.
2. *Веретенников В.Н.* Построение разностной схемы для численного расчета распространения волн цунами на произвольном множестве расчетных точек. Теоретические и экспериментальные исследования длинноволновых процессов. // Институт морской геологии и геофизики. — Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1985, с. 115–121.
3. *Нгуен Хонг Лан, Плинк Н.Л.* Численная модель для расчета штормовых нагонов и цунами в Южно-Китайском море с использованием системы криволинейных координат. //ч Ученые записки РГГМУ, 2005, № 1. — 200 с.