М.Ю. Белевич

ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ СПИРАЛЬНОСТЬ СКАЛЯРНОЙ ВЕЛИЧИНОЙ?

M.Yu. Belevich

IS THE HELICITY A SCALAR QUANTITY?

Обсуждается корректность рассмотрения спиральности и суперспиральности как скалярных величин.

Ключевые слова: спиральность, суперспиральность, скаляр, тензор.

The correctness of consideration of the helicity and superhelicity as scalar quantities is discussed.

Key words: helicity, superhelicity, scalar, tensor.

Введение

Привычным является представление о внешнем мире как о трехмерном объекте эволюционирующем во времени. Вместе с тем, при построении математического описания физических явлений нередко более удобным или универсальным оказывается описание, основанное на рассмотрении объектов в пространствах, размерность которых отлична от трех. Так, например, пространственно-временной континуум уже четырехмерен. В связи с этим, желательно использовать средства, существующие и имеющие одинаковый смысл независимо от размерности пространства. Это требование выполняется, если описание формулируется в терминах тензоров различных рангов и тензорных операций. Так, например, модель сплошной среды, записанная в тензорной форме, справедлива в пространстве любой размерности.

Традиционный взгляд на вещи исторически определил, однако, некоторые специальные способы математического описания ряда физических явлений. Специфика, о которой идет речь, заключается в том, что описание оказывается жестко связанным с трехмерностью пространства мест и не применимо в пространствах иных размерностей. Например, при записи стандартного трехмерного уравнения движения в форме Громеки—Лэмба используется так называемый вектор вихря $\omega \equiv \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ трехмерной скорости $\boldsymbol{v}$, величина (как и оператор rot), имеющая смысл лишь в трехмерном случае. Эта особенность вектора вихря связана с тем, что в 3-мерном пространстве векторы и дуальные им относительно формы объема антисимметричные тензоры 2-го ранга имеют одинаковое число независимых компонент, что позволяет указанные объекты отождествлять.

Так 2-я форма вихря $\widetilde{w} = d\widetilde{v}$, (здесь $d\widetilde{v}$ — внешняя производная 1-й формы скорости $\widetilde{v} = g(\vec{v})$, g — метрический тензор, а $\vec{v}$ — вектор скорости), будучи антисимметричным тензором 2-го ранга (см, например, [5]), имеет в трехмерном случае три независимых компоненты. Величина $*\widetilde{w}$, дуальная $\widetilde{w}$ относительно формы объема (здесь «$*$» — оператор дуализации), в том же трехмерном случае есть вектор ω, имеющий тоже три независимые компоненты, которые совпадают с компонентами тензора $\widetilde{w}$:

$$\tilde{w} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega \equiv *\tilde{w} = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}.$$

В пространствах других размерностей такое совпадение места не имеет и, следовательно, отождествление тензора 2-го ранга с вектором невозможно.

В свою очередь, величины, конструируемые на основе вектора ω, также определены лишь в трехмерном случае и перестают существовать в противном случае. Речь идет (см., например, [4] или [2]) о *спиральности H*, вычисляемой по формуле:

$$H = v \cdot \omega = v \cdot (\nabla \times v),$$

и *суперспиральности* H_S, задаваемой выражением:

$$H_S = \omega \cdot (\nabla \times \omega).$$

Здесь «·» — скалярное произведение трехмерных векторов.

В отличие от скалярных величин, определенных с помощью тензоров и тензорных операций (каковы, например, плотность кинетической энергии или градиент поля плотности массы или заряда), указанные величины (ω, H и H_S) определены с помощью операций и объектов, жестко связанных с пространством размерности три. Таким образом, если рассматривать движение среды в пространстве иной размерности, что часто оказывается удобным, то конструкциями типа ω, H и H_S, а также оператором rot пользоваться нельзя, в то время как, скажем, 2-я форма вихря $\tilde{w}$ оказывается, по-прежнему, определенной величиной.

В связи с широким использованием в литературе величин ω, H и H_S представляется важным выяснить чему они соответствуют в общем n-мерном (или четырехмерном как наиболее часто встречающемся) случае, и насколько правомерно считать обе последние конструкции (H и H_S) скалярами.

Вихрь скорости и связанные с ним величины в общем n-мерном случае

Вектор вихря скорости

Пусть $\vec{v}$ — вектор в n-мерном пространстве с метрическим тензором g и $\tilde{v} = g(\vec{v})$ — ассоциированная с $\vec{v}$ 1-я форма. Внешняя производная $\tilde{w} = d\tilde{v}$ есть n-мерная 2-я форма. Величина $*\tilde{w}$, дуальная $\tilde{w}$ относительно n-формы объема, в свою очередь, есть $(n-2)$-вектор, т.е. антисимметричный тензор типа $\binom{n-2}{0}$. Ранг этого тензора зависит от размерности пространства. В четырехмерном случае это будет 2-вектор, а в трехмерном случае, как уже говорилось, — обычный вектор. Таким образом, имеет место следующая цепочка:

$$\omega \equiv \nabla \times v \xrightarrow{nD} \tilde{v} = \underbrace{g(\vec{v})}_{1-\text{ф}} \longrightarrow \tilde{w} = \underbrace{d\tilde{v}}_{2-\text{ф}} \longrightarrow *\tilde{w} = \underbrace{*d\tilde{v}}_{(n-2)-\text{в}} \xrightarrow{4D} \underbrace{*d\tilde{v}}_{2-\text{в}} \xrightarrow{3D} \underbrace{*d\tilde{v}}_{1-\text{в}} = \omega.$$

Здесь и ниже n-в и n-ф обозначают n-вектор и n-форму, соответственно.

Спиральность (Helicity)

В общем n-мерном случае величина *He*, сконструированная согласно с определением трехмерной спиральности H, есть свертка $(n-2)$-вектора $*d\tilde{v}$ с 1-й формой $\tilde{v}$, т.е. является $(n-3)$-вектором. В четырехмерном случае *He* будет вектором, а в трехмерном случае — скаляром. Ниже эта связь представлена в компактном виде:

$$H \equiv v\cdot\underbrace{\left(\nabla\times v\right)}_{\omega}\xrightarrow{nD} He=\underbrace{\underbrace{\left(*d\tilde{v}\right)}_{(n-2)-\text{в}}\left(\tilde{v}\right)}_{(n-3)-\text{в}}\xrightarrow{4D}\underbrace{\underbrace{\left(*d\tilde{v}\right)}_{2-\text{в}}\underbrace{\left(\tilde{v}\right)}_{1-\text{ф}}}_{1-\text{в}}\xrightarrow{3D}\underbrace{\underbrace{\left(*d\tilde{v}\right)}_{1-\text{в}}\underbrace{\left(\tilde{v}\right)}_{1-\text{ф}}}_{\text{скаляр}}=H.$$

Суперспиральность (Superhelicity)

Величину, соответствующую $\nabla\times\omega$, в общем случае, можно записать по аналогии с вектором вихря. Легко видеть, что это будет тензор, дуальный внешней производной от $(n-2)$-формы $\tilde{\omega}\equiv\overbrace{g(\ldots g}^{n-2}\left(*\tilde{w}\right)\ldots)$, т.е. n-мерный вектор $\overbrace{*\underbrace{d\tilde{\omega}}_{(n-1)-\text{ф}}}^{1-\text{в}}$.

Величина *She*, соответствующая в трехмерном случае суперспиральности H_S, должна быть сверткой $(n-2)$-формы $\tilde{\omega}$ с вектором $*d\tilde{\omega}$ и является, тем самым, $(n-3)$-формой. В четырехмерном случае *She* будет 1-й формой, а в трехмерном — скаляром, что видно на нижеприведенной записи:

$$H_S\equiv\omega\cdot\left(\nabla\times\omega\right)\xrightarrow{nD} She=\underbrace{\tilde{\omega}\left(\overbrace{*\underbrace{d\tilde{\omega}}_{(n-1)-\text{ф}}}^{1-\text{в}}\right)}_{(n-3)-\text{ф}}\xrightarrow{4D}\underbrace{\tilde{\omega}\left(\overbrace{*\underbrace{d\tilde{\omega}}_{3-\text{ф}}}^{1-\text{в}}\right)}_{1-\text{ф}}\xrightarrow{3D}\underbrace{\tilde{\omega}\left(\overbrace{*\underbrace{d\tilde{\omega}}_{2-\text{ф}}}^{1-\text{в}}\right)}_{\text{скаляр}}=H_S.$$

Легко заметить, что все рассмотренные конструкции включают объекты дуальные относительно формы объема и по этой причине их ранг определяется размерностью соответствующего пространства. По этой причине ни спиральность, ни суперспиральность в общем случае скалярами не являются в отличие, скажем, от плотности кинетической энергии, которая не связана с дуальными объектами и является скаляром вне зависимости от размерности рассматриваемого пространства. Исследуемые здесь величины (*He* и *She*) представляют собой антисимметричные тензоры, ранг которых равен $(n-3)$, т.е. определяется размерностью n пространства, в котором они рассматриваются. В том и только том случае, когда $n = 3$, и $He = H$ и $She = H_S$ оказываются скалярами. Кроме того, в задачах с $n < 3$ величины *He* и *She* не определены, а $*\tilde{w}$ является скаляром. При $n = 1$ и эта последняя величина становится не определенной.

Вихрь скорости и связанные с ним величины в частном четырехмерном случае

В отличие от общего n-мерного случая четырехмерная постановка задач гидромеханики встречается достаточно часто. В связи с этим естественно задаться вопросом, как связаны в этом случае величины *He* и H, а также *She* и H_S.

Система координат

Будем рассматривать пространство событий W как прямое произведение мировой линии наблюдателя и трехмерного пространства одновременных (относительно времени наблюдателя) событий (подробнее см. в [3] или [1]). Отобразим пространство одновременных событий на $\mathbb{R}^3$, а мировую линию наблюдателя — на пространство мнимых чисел, которое обозначим через $i\mathbb{R}^1$. В результате возникает новое отображение $\phi^t : W \to i\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3$, называемое системой отсчета наблюдателя. Это отображение снабжает всякую точку из W четырьмя числами $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ — координатами этой точки. Числа x^1, x^2, x^3 суть обычные пространственные координаты. Мировая линия наблюдателя по определению есть $(x^0(t), 0, 0, 0)$. При этом полагается, что $dx^0 = icdt$, где $i = \sqrt{-1}$, а c — фазовая скорость сигнала, с помощью которого проводятся наблюдения и измерения движения среды. Такой подход позволяет единообразно работать с пространственными и временными координатами.

2-я форма вихря скорости

В каждой точке любой параметризованной временем t мировой линии определен касательный вектор скорости $\vec{v} = d_t x$, который относительно координатного базиса $\{\vec{e}_\beta\}_\beta^3 = 0$ может быть записан в виде $\vec{v} = v^\beta \vec{e}_\beta$. При этом, $v^\alpha = d_t x^\alpha$ и $v^0 = d_t x^0 = ic$, а компоненты v^1, v^2, v^3 — определяют обычную трехмерную скорость изменения места.

Пусть, далее, g — метрический тензор с компонентами $g_{\alpha\beta}$ относительно введенного базиса. Тогда $\tilde{v} = g(\vec{v})$ — 1-я форма скорости с компонентами $v_\alpha = g_{\alpha\beta} v^\beta$. Определим 2-ю форму вихря скорости выражением $\tilde{w} = d\tilde{v}$. Матрица компонент $\tilde{w}$ относительно того же базиса имеет вид:

$$2\tilde{w} = \begin{pmatrix} 0 & v_{[0,1]} & v_{[0,2]} & v_{[0,3]} \\ v_{[1,0]} & 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ v_{[2,0]} & \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ v_{[3,0]} & -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $v_{[\alpha,\beta]} \equiv v_{\alpha,\beta} - v_{\beta,\alpha} = -v_{[\beta,\alpha]}$ и $v_{\alpha,\beta} \equiv \partial_{x^\beta} v_\alpha$. Кроме того, величины $\omega^1 = v_{[3,2]}$, $\omega^2 = v_{[1,3]}$, $\omega^3 = v_{[2,1]}$ являются компонентами трехмерного стандартного вектора вихря скорости ω.

К определению четырехмерной спиральности

Дуальный относительно 4-й формы объема 2-й вектор $*d\tilde{v}$ имеет вид:

$$*d\tilde{v} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 \\ -\omega^1 & 0 & v_{[3,0]} & v_{[0,2]} \\ -\omega^2 & v_{[0,3]} & 0 & v_{[1,0]} \\ -\omega^3 & v_{[2,0]} & v_{[0,1]} & 0 \end{pmatrix}.$$

Свертка же $(*d\tilde{v})(\tilde{v})$ представляет собой четырехмерный вектор He:

$$He = \begin{pmatrix} 0 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 \\ -\omega^1 & 0 & v_{[3,0]} & v_{[0,2]} \\ -\omega^2 & v_{[0,3]} & 0 & v_{[1,0]} \\ -\omega^3 & v_{[2,0]} & v_{[0,1]} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^1 v_1 + \omega^2 v_2 + \omega^3 v_3 \\ -\omega^1 v_0 + v_{[3,0]} v_2 + v_{[0,2]} v_3 \\ -\omega^2 v_0 + v_{[0,3]} v_1 + v_{[1,0]} v_3 \\ -\omega^3 v_0 + v_{[2,0]} v_1 + v_{[0,1]} v_2 \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что в классическом пределе ($c \to \infty$) все компоненты He, кроме нулевой, обращаются в нуль и сам вектор выглядит так:

$$He = \begin{pmatrix} H \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

К определению четырехмерной суперспиральности

Аналогичные рассуждения можно применить и при определении суперспиральности. В результате получим четырехмерную 1-ю форму $She = \widetilde{\omega}(*d\widetilde{\omega})$, связанную с суперспиральностью H_S следующим выражением:

$$She = \begin{pmatrix} H_S - \omega^i v_{i,0,0} \\ v_{3,0}\left(v_{2,0,0} - (\nabla \times \omega)^2\right) + v_{2,0}\left(v_{3,0,0} - (\nabla \times \omega)^3\right) - \omega^1 \sum_i v_{i,i,0} \\ v_{3,0}\left(v_{1,0,0} - (\nabla \times \omega)^1\right) + v_{1,0}\left(v_{3,0,0} - (\nabla \times \omega)^3\right) - \omega^2 \sum_i v_{i,i,0} \\ v_{2,0}\left(v_{1,0,0} - (\nabla \times \omega)^1\right) + v_{1,0}\left(v_{2,0,0} - (\nabla \times \omega)^2\right) - \omega^3 \sum_i v_{i,i,0} \end{pmatrix}.$$

В полученном результате для наглядности и краткости часть слагаемых записана в терминах компонент трехмерного вектора $\nabla \times \omega$. Здесь использованы также обозначения $\omega_i v_{i,0,0} = \sum_i \omega_i v_{i,0,0}$ и $v_{i,0,0} = \partial_{x^0 x^0} v_i$. Кроме того, выражение для She выписано при $v_0 = \text{const}$, т.е. при постоянной скорости сигнала. Более общий результат с переменной скоростью сигнала, в виду его сложности, здесь не приводится.

Как и в случае со спиральностью, можно показать, что 1-я форма She в классическом пределе ($c \to \infty$) имеет единственную отличную от нуля компоненту, равную H_S:

$$She = \begin{pmatrix} H_S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заключение

Выше было показано, что в четырехмерном случае величины H и H_S являются не скалярами, а компонентами вектора *He* и 1-й формы *She* соответственно. Однако в рамках классической механики жидкости ($c \to \infty$) ведут они себя, как величины скалярные, т.е. независящие от выбора базиса. Объясняется это тем, что базисный вектор $\vec{e}_0$, касательный к связанной со временем координатной линии x^0, во всех используемых системах отсчета ортогонален «пространственным» базисным векторам $\vec{e}_i$ (соответственно базисная 1-я форма $\tilde{e}_0$ ортогональна «пространственным» базисным 1-м формам), а «пространственные» компоненты *He* (и *She*), в свою очередь, — тождественные нули.

Таким образом, рассуждения, проводимые в рамках трехмерной классической механики жидкости, где H и H_S скалярами являются, будут, очевидно, верны и в более общем четырехмерном случае.

Литература

1. *Белевич М.Ю.* Механика жидкости с точки зрения наблюдателя. Причинно-обусловленная механика континуума. — СПб.: РГГМУ, 2009.
   Belevich M.Yu. Mekhanika zhidkosti s tochki zreniya nablyudatelya. Prichinno-obuslovlennaya mekhanika kontinuuma. — SPb.: RGGMU, 2009.
2. *Дикинис А.В., Заболотских Е.В., Мостаманди С.В., Неелова Л.О.* Оценка количественных характеристик штормовых циклонов. // Ученые записки РГГМУ, 2010, № 16, с. 51–58.
   Dikinis A.V., Zabolotskikh Ye.V., Mostamandi S.V., Neyelova L.O. Otsenka kolichestvennykh kharakteristik shtormovykh tsiklonov. // Uchenye zapiski RGGMU, 2010, № 16, s. 51–58.
3. *Belevich M.* Causal description of non-relativistic dissipative fluid motion. // Acta Mechanica, 2003, vol. 161, p. 65–80.
4. *Hide R.* Superhelicity, helicity and potential vorticity. // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 1988, vol. 48, p. 69–79.
5. *Schutz B.F.* Geometrical methods of mathematical physics. — Cambridge: Cambridge University Press, 1980. (В перев. *Шутц Б.* Геометрические методы математической физики. — М.: Мир, 1984).