М.Ю. Белевич

О «СПЕКТРАЛЬНОЙ» ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРОМЕХАНИКИ. I. ОПИСАНИЕ ПРОБЛЕМЫ И ПРИМЕР ПОДХОДА

M.Yu. Belevich

ON THE «SPECTRAL» FORM OF THE FLUID MECHANICS EQUATIONS. I. PROBLEM DESCRIPTION AND AN EXAMPLE OF THE APPROACH

Первая часть работы посвящена обсуждению проблемы вывода «спектральной» формы уравнений гидромеханики и рассмотрению иллюстративного примера подхода к ее решению.

Ключевые слова: преобразование Фурье, интегральные преобразования, законы сохранения, спектральные уравнения.

The first part of the research deals with discussion of the problem of derivation of the spectral form of the Fluid Mechanics equations and consideration of the illustrative example of the suggested approach.

Key words: Fourier transform, Integral transforms, conservation laws, spectral equations.

Описание проблемы

Интегральные преобразования (и преобразование Фурье, в частности) с одной стороны часто используемый прием решения задач математической физики [Гагарин и др., 2011], а с другой — метод получения уравнений, описывающих спектральные свойства изучаемого явления [Захаров, 1968; Юэн и Лейк, 1987]. Такие уравнения, которые далее будем называть спектральными, всегда являются последним звеном цепи: *интегральные соотношения (законы сохранения или уравнения баланса) → дифференциальные уравнения, соответствующие интегральным соотношениям → спектральные уравнения*. В связи с очевидной односторонностью этой цепочки, уместными оказываются следующие вопросы.

1. Каков статус спектральных уравнений, скажем, модели жидкости[1]? Образуют ли они такую же полноправную систему уравнений, как и дифференциальные уравнения этой модели?
2. Можно ли продолжить эту цепочку и получить из спектральных уравнений соответствующие им интегральные соотношения?
3. Если такие интегральные соотношения существуют, то какова их связь с исходными интегральными законами сохранения? Можно ли записать всю цепочку в обратном порядке?
4. Как интерпретировать интегральные преобразования дифференциальных уравнений с точки зрения исходных интегральных соотношений?

[1] Все рассуждения, далее, иллюстрируются на примере уравнений механики жидкости.

Список вопросов легко может быть увеличен. В особенности это относится к многомерному случаю, где непростым оказывается уже вопрос о конструкции, стоящей в показателе экспоненты преобразования Фурье.

Рассмотрим, например, преобразование функции $f(t, \mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор в 3-мерном пространстве мест. Фурье образ указанной функции имеет вид:

$$F(t,\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x},$$

где $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ — так называемый 3-мерный вектор волновых чисел.

Выражение $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$ в показателе экспоненты, часто называют скалярным произведением? Однако, скалярным произведением эта величина без каких-либо дополнительных предположений быть не может, поскольку скалярное произведение определено лишь для векторов, принадлежащих одному векторному пространству. Иными словами, если величину $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$ считать скалярным произведением, а $\mathbf{x}$ — радиусом-вектором, указывающем место точки, то таким же радиусом-вектором должен быть и $\mathbf{k}$, который, между тем, считается волновым вектором. Кроме того, всегда подразумевается, что в 3-мерном, скажем, случае $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3$). Но так записывается скалярное произведение только в случае евклидовой метрики. А если потребуется рассмотреть другую метрику, что тогда следует писать в показателе экспоненты?

Предлагаемый ниже подход, позволяет предложить ответы на эти вопросы. Делается попытка выявить геометрический смысл законов сохранения, а также понять, что происходит с ними при преобразовании Фурье. Основная идея иллюстрируется в I части работы на примере конечномерного варианта проблемы. Последовательно придерживаясь намеченного там подхода, мы рассматриваем функции одного аргумента как векторы бесконечномерного линейного пространства с несчетным базисом. Например, величина $f(x)$ считается значением компоненты с номером x вектора $\overline{f}$. Функции двух и более аргументов рассматриваются как тензоры 2-го и более высоких рангов. Преобразование Фурье, как и любое другое интегральное преобразование, с этой точки зрения оказывается заменой одного несчетного базиса другим. Предлагаемая трактовка позволяет с единых позиций взглянуть на дифференциальные законы сохранения и их спектральные аналоги.

Пример подхода

Одномерное уравнение неразрывности и его «спектральный» аналог

Проиллюстрируем предлагаемый подход и, лежащие в его основе мотивы, на простом примере одномерного уравнения неразрывности. В этом случае, пространственный континуум полагается одномерным, а пространство событий W — двумерным. Интегральный закон сохранения массы m тела во времени t записывается в виде:

$$d_t m = 0. \tag{1}$$

Вводя декартовы координаты (время t и одна пространственная координата x) и плотность массы $\rho_E = \rho_E(t, x) \geqslant 0$, запишем массу тела в виде:

$$m(t) = \int_{x \in \mathbb{R}^1} \rho_E(t,x)\,dx. \tag{2}$$

Это выражение массы в терминах эйлеровых пространственных координат точек тела (на это указывает индекс E). Положение жидкого тела на $\mathbb{R}^1$ определяется как условие $\rho_E > 0$, и эйлеровы координаты множества точек, удовлетворяющих этому условию, вообще говоря, зависят от времени, $x = x(t)$.

В терминах независящих от времени лагранжевых пространственных координат $X = x(t_0)$, где t_0 — некоторый отсчетный момент времени, та же величина (соответствующие величины помечены индексом L) может быть записана следующим образом:

$$m(t) = \int_{X \in \mathbb{R}^1} \rho_E\big(t, x(t,X)\big)\,dx(t,X) = \int_X \rho_L(t,X)\,J(t,X)\,dX. \tag{3}$$

где $\rho_L(t, X) \equiv \rho_E(t, x(t, X))$, а $J(t, X) = \partial_X x$ — изменение элементарного объема в точке (t, x), т.е. якобиан преобразования координат $(t, X) - (t, x)$.

Воспользуемся, теперь, преобразованием Фурье и запишем плотность массы в виде:

$$\rho_E(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_k r_E(t,k)\,e^{ikx}\,dk, \quad \rho_L(t,\mathrm{X}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_K r_L(t,K)\,e^{iKX}\,dK, \tag{4}$$

где $r_E(t, k)$ и $r_L(t, K)$ — Фурье-образы плотностей $\rho_E(t, x)$ и $\rho_L(t, X)$, выраженных в терминах координат (t, k) и (t, K), соответственно. Подставляя последнее выражение (4) в (3), найдем:

$$m = \int_X \left(J(t,x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_K r_L(t,K)\,e^{iKX}\,dK \right) dX =$$

$$= \int_K r_L(t,K) \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_X J(t,X)\,e^{iKX}\,dX \right)}_{\Upsilon(t,K)} dK \overset{\text{def}}{=} \int_K r_L(t,K)\,\Upsilon(t,K)\,dK. \tag{5}$$

Здесь введено обозначение $\Upsilon(t,K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_X J(t,X)\,e^{iKX}\,dX$, интерпретируемое, по аналогии с $J(t, X)$, как изменение элементарного объема в точке (t, k), т.е. якобиан преобразования координат $(t, K) - (t, k)$, и в силу этого:

$$\int_K \Upsilon(t,K)\,r_L(t,K)\,dK = \int_k r_E(t,k)\,dk = m. \tag{6}$$

Сравним (2) и (6). В первом случае ρ_E — плотность массы, т.е. производная массы m по объему. Во втором случае r_E, очевидно, также плотность массы. Однако, здесь в качестве меры, по которой вычисляется производная выступает объем тела не в пространственной области, а в области волновых чисел.

Рассмотрим теперь закон сохранения (1). Поставляя (3) в (1), найдем:

$$d_t m = d_t \int_X \rho_L J dX = \int_X d_t\left(\rho_L J\right) dX = \int_x \frac{1}{J} d_t\left(\rho_E J\right) dx = \int_x \left(\partial_t \rho_E + \partial_x \rho_E v\right) dx = 0,$$
$$v \equiv d_t x, \tag{7}$$

и полагая, далее, подынтегральное выражение непрерывным, получим одномерное уравнение неразрывности:

$$\partial_t \rho_E + \partial_x \rho_E v = 0. \tag{8}$$

Если, теперь, в уравнение (1) подставить (5), то получим:

$$d_t m = d_t \int_K \Upsilon r_L\left(t, K\right) dK = \int_K d_t\left(\Upsilon r_L\right) dK = \int_k \frac{1}{\Upsilon} d_t\left(r_E \Upsilon\right) dk = \int_k \left(\partial_t r_E + \partial_k r_E \nu\right) dk = 0, \tag{9}$$

Здесь $\nu \equiv d_t k$, что интерпретируется, как скорость изменения положения в пространстве (t, k). Если и в (9) предположить непрерывность подынтегрального выражения, то будет получен спектральный вариант уравнения неразрывности:

$$\partial_t r_E + \partial_k r_E \nu = 0. \tag{10}$$

Обратим внимание на следующие обстоятельства:

1. Оба дифференциальных уравнения (8) и (10) соответствуют одному и тому же интегральному закону сохранения массы (1).
2. Исходное уравнение неразрывности (8) и его «спектральный» аналог (10) совпадают с точностью до обозначений.
3. Преобразованием Фурье связаны плотность массы ρ_E (или ρ_L) и ее «спектральный» аналог r_E (r_L, соответственно).
4. Преобразование других скалярных величин — якобианов и дивергенций полей скорости — аналогично преобразованию плотности массы, но с обратным знаком в показателе экспоненты. Так для дивергенции скорости имеем цепочку равенств:

$$\int_x \rho_E \partial_x v dx = \int_x \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_k r_E e^{ikx} dk\right) \partial_x v dx = \int_k r_E \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x \partial_x v e^{ikx} dx\right) dk = \int_k r_E \partial_k \nu dk.$$

Отсюда получаем:

$$\partial_k \nu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x \partial_x v e^{ikx} dx.$$

Таким образом, рассмотренные величины связывают следующие прямые и обратные преобразования Фурье:

прямое	обратное
$r_E(t,k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x \rho_E(t,x)e^{-ikx}dx$	$\rho_E(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_k r_E(t,k)e^{ikx}dk$
$r_L(t,K)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_X \rho_L(t,X)e^{-iKX}dX$	$\rho_L(t,X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_K r_L(t,K)e^{iKX}dK$
$\Upsilon(t,K)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_X J(t,X)e^{iKX}dX$	$J(t,X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_X \Upsilon(t,K)e^{-iKX}dK$
$\partial_k\nu=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x \partial_x\nu e^{ikx}dx$	$\partial_x\nu=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_k \partial_k\nu e^{-ikx}dk$

Для того, чтобы предложить метод исследования подобных задач, рассмотрим дискретные варианты уравнения неразрывности, его спектрального аналога и их взаимосвязь.

Дискретные варианты одномерного уравнения неразрывности

Для получения дискретных уравнений, определим в пространстве мест (здесь одномерном) равномерную сетку, состоящую из бесконечного счетного набора узлов. Заменим континуум точек бесконечным счетным набором боксов (здесь — отрезков Δx), каждый из которых содержит один и только один узел сетки.

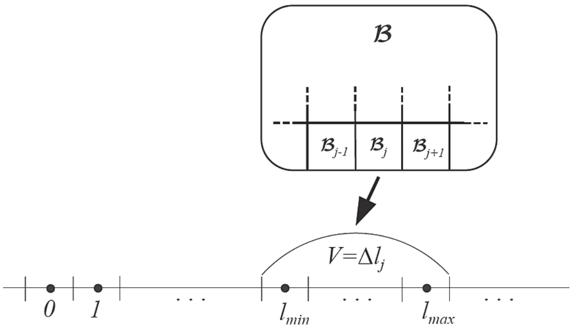

Рис. 1. Дискретное представление конфигурации тела

Припишем любым двум соседним узлам номера 0 и 1, и задав, тем самым, начало и положительное направление, занумеруем последовательно остальные узлы. Границы боксов получают дробные номера, совпадающие с номерами боксов $\pm 1/2$. Совокупность боксов образует дискретный аналог континуума точек, а нумерация узлов и их границ — аналог системы координат.

Дискретное представление конфигурации тела получим следующим образом. Разобьем одномерное тело $\mathcal{B}$ на фиксированное число частей $\mathcal{B}_j \subset \mathcal{B}$, $j \in [1, ..., j_{max}]$. В дискретном случае фиксация числа частей эквивалентна допущению того, что тело состоит из одних и тех же точек, т.е. точки в процессе эволюции не исчезают и не возникают. Определим семейство $\chi(t, \cdot)$ отображений тела на множество боксов. Каждое такое отображение задает в пространстве мест конфигурацию тела $X(t, \mathcal{B})$ и выделенных в нем частей $\chi(t, \mathcal{B}_j)$. Часть тела $\mathcal{B}_j$ отображается в момент времени t в боксы, имеющие номера в диапазоне $l_{min}(t, \mathcal{B}_j)$ и $l_{max}(t, \mathcal{B}_j)$. Таким образом, конфигурацией этой части тела служит совокупность боксов общим числом $\Delta l_j(t) = l_{max}(t, \mathcal{B}_j) - l_{min}(t, \mathcal{B}_j) + 1$. Эта же величина является объемом части тела $\mathcal{B}_j$, выраженная в единицах объема одного бокса: $V(t, \mathcal{B}_j) = \Delta l_j(t)$. Масса $\mathcal{B}_j$ есть $m(\mathcal{B}_j)$.

Поскольку все боксы пронумерованы, т.е. на множестве боксов введены координаты, каждой части тела можно присвоить номер, зависящий от ее конфигурации в данный момент времени. Будем считать, что часть тела $\mathcal{B}_j$ в момент времени t имеет номер $l_j(t) = 1/2(l_{max}(t, \mathcal{B}_j) + l_{min}(t, \mathcal{B}_j))$. Этот номер — аналог эйлеровой координаты точки тела (центра масс части $\mathcal{B}_j$).

Плотность массы $\rho(t, l_j(t))$ выражается формулой:

$$\rho\left(t, l_j(t)\right) = \frac{m\left(\mathcal{B}_j\right)}{V\left(t, \mathcal{B}_j\right)} = \frac{m\left(\mathcal{B}_j\right)}{\Delta l_j(t)} = m\left(t, \Delta x\right), \tag{11}$$

т.е. равна массе одного бокса $m(t, \Delta x)$. Эта величина постоянна в пределах конфигурации $X(t, \mathcal{B}_j)$, т.к. любая часть $\mathcal{B}_j$ рассматривается как единое целое.

Определим, далее, в некоторый момент времени, например в нулевой, отсчетную конфигурацию тела $\kappa(\mathcal{B}_j) = \chi(0, \mathcal{B}_j)$. Часть тела $\mathcal{B}_j$ в отсчетной конфигурации связана с боксами, имеющими номера в диапазоне $L_{min}(\mathcal{B}_j) = l_{min}(0, \mathcal{B}_j)$ и $L_{max}(\mathcal{B}_j) = l_{max}(0, \mathcal{B}_j)$. Таким образом, отсчетной конфигурацией этой части тела служит совокупность боксов числом $\Delta L_j = L_{max}(\mathcal{B}_j) - L_{min}(\mathcal{B}_j) + 1$. Соответственно, в нулевой момент времени часть тела $\mathcal{B}_j$ имеет номер $L_j = 1/2(L_{max}(\mathcal{B}_j) + L_{min}(\mathcal{B}_j))$. Этот номер — аналог лагранжевой координаты точки тела (центра масс части $\mathcal{B}_j$). Объем есть $V(0, \mathcal{B}_j) = \Delta L_j$, а масса — по-прежнему $m(\mathcal{B}_j)$. Плотность массы в отсчетный момент времени есть:

$$\rho\left(L_j\right) = \frac{m\left(\mathcal{B}_j\right)}{V\left(0, \mathcal{B}_j\right)} = \frac{m\left(\mathcal{B}_j\right)}{\Delta L_j} = m\left(0, \Delta x\right), \tag{12}$$

т.е. равна массе одного бокса в отсчетный момент времени.

В силу взаимной однозначности имеют место отображения:

$$\underbrace{\left(t, \mathcal{B}_j\right)}_{\text{события}} \overset{\chi}{\mapsto} \underbrace{\chi\left(t, \mathcal{B}_j\right)}_{\text{конфигурация}} \mapsto \underbrace{l_j(t)}_{\text{число}}, \quad \chi^{-1} : l_j(t) \mapsto \mathcal{B}_j,$$

$$\underbrace{\left(0, \mathcal{B}_j\right)}_{\text{события}} \overset{\kappa}{\mapsto} \underbrace{\kappa\left(\mathcal{B}_j\right)}_{\text{конфигурация}} \mapsto \underbrace{L_j}_{\text{число}}, \quad \kappa^{-1} : L_j \mapsto \mathcal{B}_j.$$

Связь l_j и L_j такова:

$$l_j(t) = \chi(t, \mathcal{B}_j) = \chi(t, \kappa^{-1}(L_j)) = \chi_\kappa(t, L_j).$$

Поскольку это выполняется для любого j, имеем $l(t) = \chi_\kappa(t, L)$. Здесь l и L — эйлеровы и лагранжевы номера одной и той же части тела, соответственно.

Плотность, т.е. функция $\rho(t, x)$, положительные значения которой ассоциируются с телом, заменяется в дискретном случае бесконечномерным вектором $\overline{\rho}(t)$. Каждая компонента вектора ρ^{l_j} в различные моменты времени ассоциируется с совокупностью боксов сетки $\Delta l(t, \mathcal{B}_j)$, т.е. конфигурацией Δl_j части тела $\mathcal{B}_j$. Соответственно, в отсчетный момент времени конфигурация части $\mathcal{B}_j$ есть ΔL_j, а компонента вектора $\overline{\rho}(0)$, связанная с $\mathcal{B}_j$ имеет номер L_j.

Масса тела выражается суммой $m(\mathcal{B}) = \sum_j m(\mathcal{B}_j)$, где $m(\mathcal{B}_j)$ из определений (11) и (12) есть:

$$m(\mathcal{B}_j) = \rho(t, l_j(t))\Delta l_j(t) = \rho(L_j)\Delta L_j.$$

В терминах компонент вектора $\overline{\rho}$ последние равенства можно записать в виде:

$$m(\mathcal{B}_j) = \rho^{l_j}(t)\Delta l_j(t) = \rho^{L_j}\Delta L_j. \tag{13}$$

Отсюда масса тела находится из выражения:

$$m(\mathcal{B}) = \sum_j \rho^{l_j}(t)\Delta l_j(t) = \sum_j \rho^{L_j}\Delta L_j. \tag{14}$$

Суммирование, которое здесь ведется по всем выделенным частям тела, можно, однако, заменить на суммирование по всем целым числам, если заметить, что значение компоненты вектора плотности ρ^l отлично от нуля лишь в пределах конфигурации тела. Первое равенство (14) есть дискретный аналог (2), а второе — аналог (3).

Для получения дискретного аналога уравнения неразрывности (8) запишем (14) в виде:

$$m(\mathcal{B}) = \sum_j \rho^{l_j}(t)\frac{\Delta l_j(t)}{\Delta L_j}\Delta L_j = \sum_j \rho^{l_j}(t) J_j(t)\Delta L_j. \tag{15}$$

Здесь $J_j(t) = \Delta l_j(t)/\Delta L_j$ — дискретный аналог якобиана преобразования координат. Дифференцируя по времени[1] полученное равенство (15), найдем:

[1] Под дифференцированием здесь понимается вычисление отношения приращения функции за шаг по времени к величине этого шага.

$$d_t m(\mathcal{B}) = \sum_j d_t \left(\rho^{l_j(t)} \frac{\Delta l_j(t)}{\Delta L_j} \right) \Delta L_j = \sum_j \left(d_t \rho^{l_j(t)} \frac{\Delta l_j(t)}{\Delta L_j} + \rho^{l_j(t)} \frac{d_t\left(\Delta l_j(t)\right)}{\Delta L_j} \right) \Delta L_j =$$

$$= \sum_j \frac{\Delta l_j(t)}{\Delta L_j} \left(d_t \rho^{l_j(t)} + \rho^{l_j(t)} \frac{d_t\left(\Delta l_j(t)\right)}{\Delta l_j(t)} \right) \Delta L_j =$$

$$= \sum_j \left(d_t \rho^{l_j(t)} + \rho^{l_j(t)} \frac{d_t\left(\Delta l_j(t)\right)}{\Delta l_j(t)} \right) \Delta l_j(t) = 0. \tag{16}$$

Отсюда, в силу произвольности разбиения тела $\mathcal{B}$ на части, получаем дискретный аналог уравнения неразрывности:

$$d_t \rho^l + \rho^l \frac{d_t \Delta l}{\Delta l} = 0, \tag{17}$$

или, иначе

$$d_t \rho^l + \rho^l \frac{d_t l_{\max} - d_t l_{\min}}{l_{\max} - l_{\min} + 1} = 0, \tag{18}$$

Производные $d_t l_{\max}$ или $d_t l_{\min}$ (т.е. скорости изменения индексов, нумерующих границы конфигурации части тела, имеющей текущий номер l) являются дискретными аналогами $\vec{\upsilon}$ — скорости изменения места.

Таким образом, после того, как построена сетка, место координат $x \in \mathbb{R}^1$ заступили номера узлов $l \in \mathbb{Z}$, место функции $\rho(x)$ — вектор $\overline{\rho} = (\ldots, \rho^j, \ldots)$, а место скорости изменения положения $\vec{v} = d_t x$ — ее дискретный аналог — скорость изменения номера узла. Если $\overline{\rho}$ — вектор, то ρ^j — его j-я компонента относительно некоторой совокупности базисных элементов $B = \{\overline{e}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, т.е. базиса. Сами базисные элементы $\overline{e}_k$ относительно базиса B имеют единственную отличную от нуля компоненту, равную единице, с номером k. При замене базиса (скажем, при переходе от эйлеровых координат к лагранжевым) меняются компоненты вектора $\overline{\rho}$, но не сам вектор. В отличие от вектора плотности массы $\overline{\rho}$, вектор скорости $\vec{v}$ меняется сам, так как он описывает скорость изменения индекса «частицы», а в лагранжевом представлении такового не происходит. Иными словами, если дискретный аналог плотности массы является бесконечномерным вектором, то дискретный аналог скорости перемещения таким вектором не является (т.е. не является бесконечномерным вектором).

Выше были определены лишь те компоненты вектора $\overline{\rho}$, которые имеют номера $\{l_j\}$. Определим остальные компоненты следующим образом. Компонента $\rho^k = 0$, если бокс с номером k не принадлежит конфигурации тела. Компонента $\rho^l = \rho^{l_j}$, если $l \in [l_{\min}(t, \mathcal{B}_j), l_{\max}(t, \mathcal{B}_j)]$.

Дискретный аналог преобразования Фурье плотности массы (4), записанной в эйлеровых и лагранжевых координатах, имеет вид:

$$\rho^l(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n r^n(t) \exp\left(i\left(\sum\nolimits_{m=1}^{n} \Delta k_m\right)\left(\sum\nolimits_{p=1}^{l} \Delta l_p\right)\right)\Delta k_n,$$

$$\rho^L = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_N r^N \exp\left(i\left(\sum\nolimits_{m=1}^{N} \Delta K_m\right)\left(\sum\nolimits_{p=1}^{L} \Delta L_p\right)\right)\Delta k_N. \qquad (19)$$

Здесь компоненты векторов ρ и r суть массы соответствующих боксов (Δx и Δk) в пространстве мест и в пространстве волновых чисел, соответственно. Величина Δk — шаг сетки (здесь также равномерной) дискретного аналога пространства (t, k). Нетрудно видеть, что в правых частях равенства (19) стоят свертки $\binom{1}{1}$ тензора R с вектором r, т.е. $\bar{\rho} = \mathrm{R}\bar{r}$:

$$\rho^l = \mathrm{R}^l_n r^n, \quad \rho^L = \mathrm{R}^L_N r^N. \qquad (20)$$

Среди возможных интерпретаций (20), предпочтение будем отдавать той, которая рассматривает (20), как замену базиса бесконечномерного векторного пространства. В этом случае $\bar{\rho} = (..., \rho^l, ...)$ и $\bar{r} = (..., r^n, ...)$ суть представления одного и того же бесконечномерного вектора в различных базисах, связь между которыми устанавливается тензором R с компонентами вида:

$$\mathrm{R}^l_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(i\left(\sum\nolimits_{m=1}^{n} \Delta k_m\right)\left(\sum\nolimits_{p=1}^{l} \Delta l_p\right)\right)\Delta k_n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(i\big(k(t,n) - k(t,0) + 1\big)\big(l(t,l) - l(t,0) + 1\big)\Big)\Delta k_n,$$

$$\mathrm{R}^L_N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(i\left(\sum\nolimits_{m=1}^{N} \Delta K_m\right)\left(\sum\nolimits_{p=1}^{L} \Delta L_p\right)\right)\Delta K_n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(i\big(K(n) - K(0) + 1\big)\big(L(l) - L(0) + 1\big)\Big)\Delta K_n.$$

Подставляя (20) в уравнение (16), получим дискретный вариант спектрального аналога уравнения неразрывности (10), которое как и уравнение (10), будет с точностью до обозначений повторять (17) или (18), а именно:

$$d_t r^n + r^n \frac{d_t \Delta n}{\Delta n} = 0, \qquad (21)$$

или, иначе

$$d_t r^n + r^n \frac{d_t n_{\max} - d_t n_{\min}}{n_{\max} - n_{\min} + 1} = 0. \qquad (22)$$

Обсуждение

В предложенном иллюстративном примере, важными представляются следующие моменты:

1. Связь плотности массы ρ и ее Фурье-образа r отлична от связи скорости изменения места $v = d_t x$ и скорости изменения волнового числа $\nu = d_t k$.
2. В дискретном случае плотности массы ρ и ее Фурье-образу r ставятся в соответствие бесконечномерные векторы $\bar{\rho}$ и $\bar{r}$, которые можно интерпретировать, как представления одного и того же геометрического объекта в различных базисах. Замена базиса осуществляется посредством дискретного преобразования Фурье.
3. Дискретным аналогом координат (места, в данном случае) служат номера компонент объекта ($\bar{\rho}$ или $\bar{r}$ в рассмотренном примере). Количество независимых переменных непрерывной функции (например, $\rho(x, y, z)$) определяет ранг ее дискретного аналога (ρ^{jlm}, соответственно). Понятно, что тензор и номера его компонент, суть объекты различной геометрической природы и, потому, не обязаны преобразовываться одинаково при замене базиса (см. п. 1).

Приведенный пример с дискретным аналогом одномерного уравнения неразрывности и его спектрального двойника, позволяет, как нам кажется, увидеть линейно-алгебраическую природу интегрального преобразования (например, Фурье). Следующим шагом будет переход к непрерывному случаю, с учетом всех отмеченных обстоятельств. Прежде всего, это означает, что мы будем стараться сохранить взгляд на ρ, r и подобные им объекты, как на линейно-алгебраические конструкции, а интегральное преобразование интерпретировать как вариант замены базиса бесконечномерного (вообще говоря, несчетномерного) векторного пространства. Для этой цели, мы далее в части II строим такое векторное пространство F (точнее, несчетномерное гильбертово пространство). Затем в части III обсуждаем варианты замены базиса в построенном гильбертовом пространстве, т.е. интегральные преобразования элементов из F. Интегральные законы сохранения механики сплошных сред в новых терминах записываются в части IV, а в части V выводятся их спектральные аналоги. Наконец, в части VI обсуждаются полученные результаты и приводятся иные варианты использования предложенного подхода.

Литература

1. *Гагарин Ю.И., Гагарин К.Ю., Соколов В.И.* Обобщённое быстрое преобразование Уолша-Хаара. // Ученые записки РГГМУ, 2011, № 17, с. 105–111.
   Gagarin Yu.I., Gagarin K.Yu., Sokolov V.I. Obobshchyennoe bystroe preobrazovanie Uolsha-Khaara. // Uchenye zapiski RGGMU, 2011, № 17, s. 105–111.
2. *Захаров В.Е.* Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости. // Прикладная механика и техническая физика, 1968, № 2, с. 86–94.
   Zakharov V.E. Ustoychivost' periodicheskikh voln konechnoy amplitudy na poverkhnosti glubokoy zhidkosti. // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 1968, № 2, s. 86–94.
3. *Юэн Г., Лейк Б.* Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. — М.: Мир, 1987. — 179 с. (*Yuen H.C., Lake B.M.* Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves. // Advances in Applied Mechanics, 1982, vol. 22, pp. 67–229).
   Yuen G., Leyk B. Nelineynaya dinamika gravitatsionnykh voln na glubokoy vode. — M.: Mir, 1987. — 179 s. (*Yuen H.C., Lake B.M.* Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves. // Advances in Applied Mechanics, 1982, vol. 22, pp. 67–229).