

А.В. Сикан, И.О. Винокуров, Д.Д. Тесленко

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА L-МОМЕНТОВ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ РАСХОДОВ ВЕСЕННЕГО ПОЛОВОДЬЯ РЕК СЕВЕРО-ЗАПАДА РОССИИ

A.V. Sikan, I.O. Vinokurov, D.D. Teslenko

APPLICATION OF THE L-MOMENTS METHOD FOR ESTIMATING DISTRIBUTION PARAMETERS OF THE MAXIMUM RIVER FLOW IN THE NORTH-WEST OF RUSSIA

В работе показана возможность применения метода L-моментов для оценки параметров распределения максимальных расходов весеннего половодья, произведен сравнительный анализ с оценками выполненными методом моментов.

Ключевые слова: гидрологические расчеты, метод L-моментов, максимальные расходы воды, распределение Пирсона III типа.

The paper presents a method of L-moments, which can be used for calculating of distribution parameters of the maximum water discharge, and a comparison of distribution parameters between methods of the moments and L-moments.

Key words: hydrological design, L-moments, maximum water discharges, Pearson distribution of the third type.

Подход, основанный на теории L -моментов был впервые предложен в 1989 г. Уоллисом [8] и затем развит в работах Хоскинга и Уоллиса [5, 6]. В настоящее время оценка параметров распределения с использованием метода L -моментов рассматривается многими исследователями как альтернатива классическому методу моментов.

В руководстве ВМО [2] отмечается: «Одним из последних методологических достижений является использование метода L -моментных статистик, показавшим существенное улучшение по сравнению с более традиционным методом максимального правдоподобия или методом моментов».

К основным достоинствам метода L -моментов относят то, что если распределение имеет первый начальный момент, то L -моменты всегда существуют даже если речь идет о распределениях с «тяжелыми хвостами». Кроме того, выборочные оценки L -моментов являются несмещенными и более эффективными по сравнению с обычными моментными оценкам, при этом они не зависят от типа распределения.

Выборочные L -моменты определяются по формулам:

$$l_1 = b_0, \quad (1)$$

$$l_2 = 2b_1 - b_0, \quad (2)$$

$$l_3 = 6b_2 - 6b_1 + b_0, \quad (3)$$

$$l_4 = 20b_3 - 30b_2 + 12b_1 - b_0, \quad (4)$$

где b_0, b_1, b_2, b_3 — выборочные несмещенные оценки вероятностно взвешенных моментов [7], определяемые по ранжированной (в порядке возрастания) выборке длиной n .

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i, \quad (5)$$

$$b_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{i=n} \frac{(i-1)}{(n-1)} x_i, \quad (6)$$

$$b_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=3}^{i=n} \frac{(i-1)(i-2)}{(n-1)(n-2)} x_i, \quad (7)$$

$$b_r = \frac{1}{n} \sum_{i=r+1}^{i=n} \frac{(i-1)(i-2)\dots(i-r)}{(n-1)(n-2)\dots(n-r)} x_i. \quad (8)$$

В теории L -моментов используются также L -моментные отношения, которые являются аналогами соответственно коэффициента вариации, коэффициента асимметрии и эксцесса:

$$t_2 = l_2/l_1 — \text{выборочный коэффициент } L\text{-вариации}; \quad (9)$$

$$t_3 = l_3/l_2 — \text{выборочный коэффициент } L\text{-асимметрии}; \quad (10)$$

$$t_4 = l_4/l_2 — \text{выборочный } L\text{-эксцесс}. \quad (11)$$

В работе [6] приводятся формулы, связывающие естественные параметры распределения с L -моментами для некоторых типов распределений, используемых в гидрологической практике, в частности, для распределения Пирсона III типа. Для распределения Пирсона III типа с положительной асимметрией функция плотности вероятности имеет вид:

$$f(x) = \frac{(x-\gamma)^{\alpha-1} e^{-(x-\gamma)/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, \quad (12)$$

где α — параметр формы; β — параметр масштаба; γ — параметр сдвига; $\Gamma(\cdot)$ — гамма функция.

Параметры α, β и γ связаны с L -моментами следующими соотношениями:

$$\alpha \approx \frac{1 + 0,2906z}{z + 0,1882z^2 + 0,0442z^3}, \quad \text{если } 0 < |t_3| < 1/3, \quad \text{где } z = 3p(t_3)^2, \quad (13)$$

$$\alpha \approx \frac{0,36067z - 0,59567z^2 + 0,25361z^3}{1 - 2,78861z + 2,56096z^2 - 0,77045z^3}, \quad \text{если } 1/3 < |t_3| < 1, \quad \text{где } z = 1 - |t_3|, \quad (14)$$

$$\beta = \frac{l_2 \Gamma(\alpha) \pi^{0,5}}{\Gamma(\alpha + 0,5)}, \quad (15)$$

$$\gamma = l_1 - \alpha\beta. \quad (16)$$

От параметров распределения, полученных методом L -моментов можно перейти к обычным моментным характеристикам распределения Пирсона III типа:

$$- \text{среднее значение } \bar{x} = \gamma + \sigma\sqrt{\alpha} = b_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i, \quad (17)$$

$$- \text{стандартное отклонение } \sigma = \beta\sqrt{\alpha}, \quad (18)$$

$$- \text{коэффициент вариации } C_v = \sigma / \bar{x}, \quad (19)$$

$$- \text{коэффициент асимметрии } C_s = \sqrt{(4/\alpha)}. \quad (20)$$

Такой переход позволяет использовать для построения аналитических кривых обеспеченностей традиционные таблицы распределения Пирсона III, где квантили распределения представлены как функция от \bar{x} , C_v и C_s . В этом случае схема расчета параметров распределения Пирсона III типа методом L -моментов следующая:

1. Исходный ряд ранжируется в возрастающем порядке.
2. По формулам (5–7) рассчитываются оценки вероятностно взвешенных моментов: b_0, b_1, b_2 .
3. По формулам (1–3) рассчитываются выборочные L -моменты: l_1, l_2, l_3 .
4. По формуле (10) определяется выборочный коэффициент L -асимметрии: t_3 .
5. По формулам (13–16) определяются параметры распределения Пирсона III типа: α, β и γ .
6. С использованием формул (17–20) определяются среднее значение, коэффициент вариации и коэффициент асимметрии.

Основные этапы расчета на примере ряда максимальных расходов весеннего половодья р. Шуя в створе д. Бесовец представлены в табл. 1–4. На рис. 1 приводятся эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей для этого створа.

В России метод L -моментов пока не нашел широкого применения. Из публикаций на эту тему можно отметить работы [1, 3]. В настоящем исследовании была предпринята попытка оценить возможности метода для расчета максимального стока на примере

рядов максимальных расходов весеннего половодья рек Северо-Запада РФ. В общей сложности были использованы 103 ряда для рек с диапазоном площадей водосборов от 10,2 до 22500 км². Для каждого ряда были получены значения коэффициентов вариации и асимметрии двумя методами: методом моментов и методом L-моментов. В качестве базовой кривой использовалась кривая Пирсона III типа.

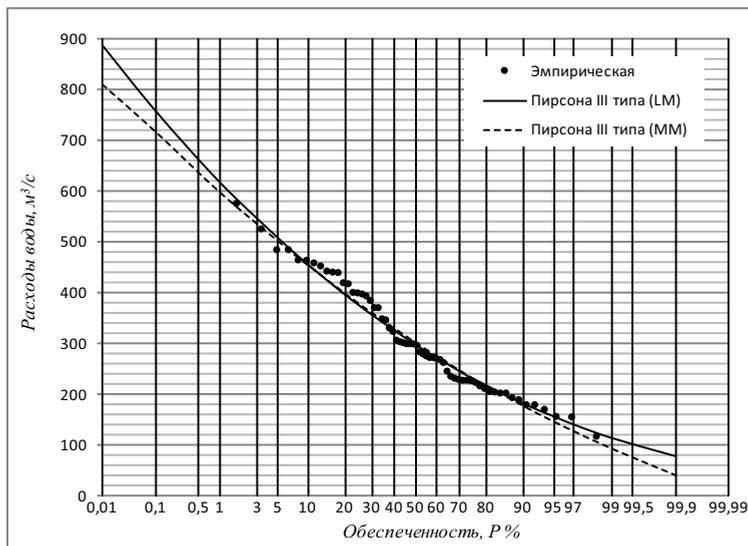


Рис. 1. Эмпирическая и аналитические кривые обеспеченностей максимальных расходов весеннего половодья: р. Шуя — д. Бесовец. Оценка параметров распределения выполнена методом моментов (ММ) и методом L-моментов (LM)

Таблица 1

Пример расчета выборочных оценок вероятностно взвешенных моментов

№	Год	Расход воды, м ³ /с		$\frac{(i-1)}{(n-1)}Q_i$	$\frac{(i-1)(i-2)}{(n-1)(n-2)}Q_i$
		Q	$Q_{\text{ранж}}$		
1	1926	460	119	0,00	0,00
2	1927	399	157	2,617	0,00
3	1928	172	158	5,267	0,089
4	1929	419	172	8,600	0,292
5	1930	204	181	12,07	0,614
...
59	1998	372	486	469,80	453,87
60	1999	247	527	518,22	509,43
61	2000	402	577	577,00	577,00
Сумма			$\Sigma_0 = 18949$	$\Sigma_1 = 11333$	$\Sigma_2 = 8246$
Σ/n			$b_0 = 310,6$	$b_1 = 185,8$	$b_2 = 135,2$

Таблица 2

Выборочные L -моменты и L -моментные соотношения

L-моменты			Коэффициенты	
l_1	l_2	l_3	L-вариации t_2	L-асимметрии t_3
310,6	60,92	7,06	0,196	0,116

Таблица 3

Расчетные параметры распределения Пирсона III типа

t_3	z	l_2	$\Gamma(\alpha)$	$\Gamma(\alpha+0,5)$	l_1	Параметры распределения		
						α	β	γ
0,116	0,126	60,92	5090	14178	310,6	8,005	38,76	0,329

Таблица 4

Значения статистических характеристик, полученные разными методами

Метод	Статистические характеристики				
	среднее значение	стандартное отклонение, σ	коэффициент вариации, C_v	коэффициент асимметрии, C_s	C_s/C_v
Моментов	311	106,6	0,34	0,45	1,31
L-моментов	311	109,7	0,35	0,71	2,00

Как показал анализ, значения коэффициентов вариации, полученные методами моментов и L -моментов практически не различаются (рис. 2). В 86 % случаев коэффициенты вариации либо совпадают, либо различаются на 0,01. При этом надо отметить, что в исследуемом районе коэффициенты вариации относительно небольшие — в 96 % случаев $C_v < 0,6$. Возможно для районов с более высокой вариацией методы будут давать более значительное расхождение.

Значения отношений C_s/C_v , рассчитанные двумя методами, имеют более заметное различие. Причем при $C_s/C_v < 3$ метод L -моментов в среднем дает более высокие значения, а при $C_s/C_v > 3$, наоборот, более низкие (рис. 3). Однако, как видно на рисунке разброс точек достаточно большой и в отдельных случаях разница значений может быть как положительной, так и отрицательной.

Кривые обеспеченностей, построенные с использованием статистических характеристик полученных методом L -моментов в большинстве случаев лучше согласуются с эмпирическими точками в области малых обеспеченностей, чем при использовании традиционного метода моментов. Однако в области больших обеспеченностей возможны ситуации, когда метод L -моментов дает для кривой Пирсона III типа нижний предел (γ), превышающий эмпирический минимум ряда. В последнем случае вместо кривой Пирсона III типа целесообразно использовать традиционную для российской гидрологической практики кривую Крицкого-Менкеля с параметрами, определенными методом максимального правдоподобия (так как для этой кривой пока не разработан алгоритм перехода от L -моментов к естественным параметрам распределения).

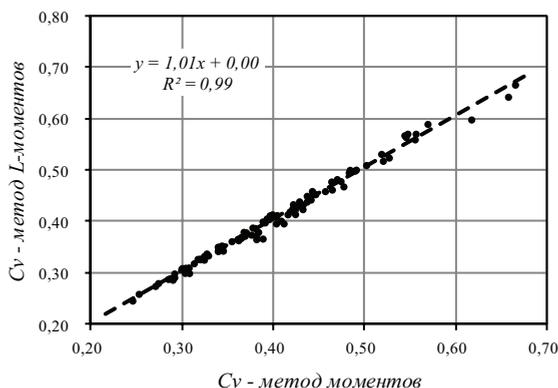


Рис. 2. График связи коэффициентов вариации, рассчитанных методом моментов и методом L -моментов для максимальных расходов весеннего половодья рек Северо-Запада РФ

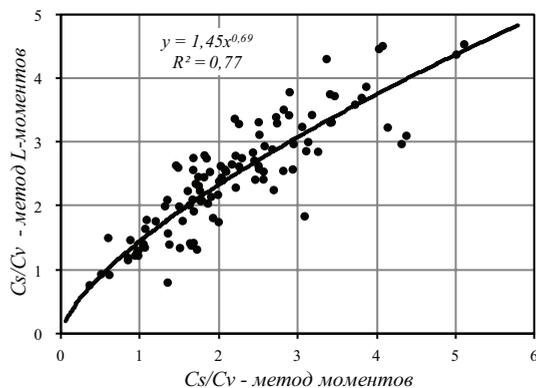


Рис. 3. График связи отношений C_s/C_v , рассчитанных методом моментов и методом L -моментов для максимальных расходов весеннего половодья рек Северо-Запада РФ

При малых значениях асимметрии ($C_s/C_v < 2$) кривая Пирсона III типа имеет отрицательный нижний предел, в этом случае наилучшее соответствие эмпирических и аналитических кривых имело место при использовании распределений Крицкого-Менкеля и Вейбулла [4].

Таким образом, метод L -моментов нельзя рассматривать как полную альтернативу классическим методам оценки параметров в отрыве от используемых кривых обеспеченностей. Метод, действительно, дает хорошие результаты, но только в том случае, если тип выбранного распределения способен корректно описать конкретную гидрологическую характеристику (наличие или отсутствие нижнего и верхнего пределов, степень изменчивости и асимметричности, наличие выбросов и т.д.).

Использование метода L -моментов (как, впрочем, и любого другого метода) при формальном подходе к выбору типа распределения (например, только на основе

критериев согласия) может привести к существенным ошибкам при расчете гидрологических характеристик редкой повторяемости, которые определяются по экстраполированной части кривой обеспеченностей.

Литература

1. *Губарева Т.С., Гарцман Б.И.* Оценка параметров распределений экстремальных гидрометеорологических величин методом L-моментов. // Водные ресурсы, 2010, т. 34, № 4, с. 398–407.
2. Документ ВМО №168. Руководство по гидрологической практике. Сбор и обработка данных, анализ, прогнозирование и другие применения, 1994.
3. *Писаренко В.Ф., Болгов М.В., Осипова Н.В., Рукавишникова Т.А.* Применение теории экстремальных событий в задачах аппроксимации распределений вероятностей максимальных расходов воды. // Водные ресурсы, 2002, т. 29, № 6, с. 645–657.
4. *Сукан А.В.* Практические приемы оценки параметров распределения Вейбулла при выполнении гидрологических расчетов. // Ученые записки РГГМУ, 2011, № 19, с. 37–45.
5. *Hosking J.K.M.* L-moments: analysis and estimation of distributions using linear combinations of ordered statistics. // J. R. Statis. Soc. Ser., 1990, B52(1), pp. 105–124.
6. *Hosking J.K.M., Wallis J.R.* Regional frequency analysis, an approach based on L-moments. — Cambridge university press., 1997.
7. *Landwehr J.M., Matalas N.C., Wallis J.R.* Probabilityweighted moments compared with some traditional techniques in estimating Gumbel parameters and quantiles. // Water Res. Research, 1979, vol. 15, № 5, pp. 1055–1064.
8. *Wallis J.R.* Regional frequency studies using L-moments. // IBM Research Report, 1989, RC14597, p. 17.