

*М.Е. Баранова, А.С. Гаврилов, Динь Ху Нго*

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МИКРОМАСШТАБНОГО ОБТЕКАНИЯ РЕЛЬЕФА

*М.Е. Baranova, A.S. Gavrilov, Dinh Huy Ngo*

## NUMERICAL MODELLING MICROSCALE WRAPPING RELIEF

Предлагается комбинированная гидротермодинамическая численная модель для расчета трехмерных полей скорости и температуры в атмосферном пограничном слое при наличии элементов рельефа произвольной конфигурации. Первоначально по данным стандартной гидрометеорологической информации с использованием модели атмосферного пограничного слоя на территории в радиусе 30 км до высоты 2 км рассчитываются поля скорости ветра, температуры и влажности. Результаты этих расчетов используются, далее, в качестве исходных для гидротермодинамической 3D модели с воспроизведением особенностей обтекания элементов рельефа.

*Ключевые слова:* рельеф, численное моделирование атмосферы, горно-долинные ветры.

*We consider the combined hydrothermodynamic numerical model to calculate a three-dimensional velocity fields and temperature in the atmospheric boundary layer in the presence of the relief elements of arbitrary configuration. Pristinely according to the standard hydrometeorological information with use of model of an atmospheric boundary layer of the area in radius of 30 km up to height of 2 km the fields of wind speed and temperature are calculated. Then results of these calculations are used as initial values for hydrothermodynamic 3D model with reproduction of features of a flow of each element of the relief.*

*Key words:* relief, numerical simulations of the atmosphere, mountain-valley winds.

### *Постановка вопроса*

Численное моделирование атмосферной циркуляции на микромасштабах (от единиц метров до десятков километров) необходимо, в первую очередь, для решения такой важной экологической задачи, как расчет загрязнения атмосферы от разнообразных антропогенных выбросов. Нижний диапазон указанного интервала масштабов (1–100 м) охватывает описание динамического влияния таких объектов, как промышленная и жилая застройка, оказывающих весьма серьезное воздействие на перенос и рассеяние антропогенных примесей. Средняя часть этого интервала (0,1–1 км) связана в большинстве случаев с влиянием невысокого (сотни метров) рельефа, а верхняя часть интервала микромасштабов (1–10 км) ответственна за формирование таких бароклинических эффектов, как бризовая циркуляция и горнодолинные ветры.

Все модели этой категории относятся к так называемым моделям «крупных вихрей» — LES (Large Eddy Simulation) с явным выделением в численной модели

турбулентных возмущений с масштабами  $L \gg \Delta$ , где  $\Delta$  — пространственный шаг расчетной сетки модели, и с той или иной параметризацией так называемой подсеточной турбулентности. Существенно, что характерный размер сетки  $\Delta$  должен здесь выбираться таким образом, чтобы он относился к диапазону масштабов атмосферной турбулентности из так называемой «инерционной» области спектра атмосферной турбулентности, где поток энергии по спектру направлен от больших масштабов к меньшим (например, [1]). Иначе говоря, способ параметризации подсеточной турбулентности в такой модели должен гарантировать, что вся энергия турбулентности, генерируемая за счет средних градиентов скорости ветра и температуры, диссипирует в тепло (в противном случае возникает явление нелинейной неустойчивости и решение задачи становится невозможным).

В научной литературе, посвященной вопросам 3D численного моделирования атмосферы над неоднородной подстилающей поверхностью, в настоящее время сложились три основных подхода (например, [2]):

- переход в системе уравнений гидротермодинамики атмосферы к косоугольной системе координат с новой вертикальной координатой  $\zeta = z - h(x, y)$ , где  $x, y$  — горизонтальные координаты некоторой декартовой системы координат с осью  $z$ , направленной вертикально вверх, а  $h(x, y)$  — высота элемента орографической неоднородности (например, [3, 4]);
- переход от стандартной системы координат  $(x, y, z)$  к новой ортогональной системе координат  $x', y', z'$ , где в каждой точке пространства возникает своя декартова система координат с одновременным выполнением условия перпендикулярности оси  $z'$  к поверхности  $h(x, y)$  в каждой точке их пересечения (например, [2]);
- использование так называемого «метода фиктивных областей», при котором используется стандартная система координат  $(x, y, z)$ , но только для областей за пределами орографических неоднородностей  $z > h(x, y)$  (например, [5]).

Первый из этих методов активно применялся несколько десятилетий назад, когда мощности используемых ЭВМ были весьма ограничены. К серьезным недостаткам косоугольных систем координат относится необходимость использования при этом весьма громоздкой записи уравнений гидротермодинамики атмосферы (например, [7]). В этом случае оказывается весьма проблематичным применение обычных гипотез замыкания при описании турбулентных течений, которые, в большинстве случаев, основаны на тех или иных соображениях подобия и симметрии, которые в такого рода косоугольных системах оказываются далеко не очевидными [8]. Кроме того, при таком подходе оказывается затруднительным описание процессов обтекания достаточно крутых склонов и, особенно, зданий и сооружений с вертикально ориентированными ограждениями.

Второй подход существенно лучше в части использования традиционной формы уравнений и методов параметризации атмосферной турбулентности, но требует предварительной реализации весьма трудоемких вычислительных процедур по построению своей собственной ортогональной расчетной сетки на каждой новой конфигурации рельефа. Также как и предыдущий метод, этот метод не пригоден для крутых склонов и застройки.

Значительно более универсальным является последний подход — метод фиктивных областей, для которого нет ограничений в наклоне элементов рельефа и использования стандартных приемов параметризации подсеточной турбулентности. Такие его недостатки, как некоторое усложнение алгоритма интегрирования и постановки граничных условий, а также необходимость выделения значительной оперативной памяти ЭВМ, легко компенсируются постоянным увеличением мощности последних.

Настоящая работа развивает подход, основанный на методе фиктивных областей, впервые примененный авторами настоящей работы к моделированию обтекания произвольно расположенных в пространстве элементов застройки [9], в направлении моделирования обтекания таким же образом расположенных элементов невысокого рельефа (высотой не более 1 км) с произвольной кривизной склонов.

### Основные уравнения

Запишем систему осредненных уравнений динамики атмосферы для компонент вектора скорости ( $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$ ) и отклонений потенциальной температуры ( $\vartheta$ ) от своих фоновых значений ( $\bar{\theta}$ ) на вращающейся Земле в системе декартовых координат  $x_i$ , направив ось  $x_1 \equiv x$  для определенности на восток, ось  $x_2 \equiv y$  на север, а  $x_3 \equiv z$  вертикально вверх (формулы (1)–(12)):

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \tilde{u}_\alpha \frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial \pi}{\partial x_1} + l(u_2 - V_G) - \frac{\partial R_{1\alpha}}{\partial x_\alpha}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \tilde{u}_\alpha \frac{\partial u_2}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial \pi}{\partial x_2} - l(u_1 - U_G) - \frac{\partial R_{2\alpha}}{\partial x_\alpha}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \tilde{u}_\alpha \frac{\partial u_3}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial \pi}{\partial x_3} + \beta \vartheta - \frac{\partial R_{3\alpha}}{\partial x_\alpha}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \tilde{u}_\alpha \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha} + \delta_{\alpha 3} \gamma_\theta \right) = \frac{\partial H_\alpha}{\partial x_\alpha}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (5) \quad U_G = -\frac{1}{\bar{\rho}l} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_2}, \quad (6)$$

$$V_G = \frac{1}{\bar{\rho}l} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_1}, \quad (7) \quad \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = -\bar{\rho}g, \quad (8)$$

$$\bar{\theta} = \bar{T} \left( \frac{P_0}{\bar{P}} \right)^{R/Cp}, \quad (9) \quad \bar{P} = \bar{\rho}R\bar{T}, \quad (10)$$

$$P = \rho RT, \quad (11) \quad \gamma_\theta = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_3}, \quad (12)$$

где  $\pi = (P - \bar{P})/\rho$  — отклонение давления воздуха  $P$  от своей средней величины  $\bar{P}$ , нормированное на его плотность  $\rho$ ;  $R_{ij} \equiv \langle u_i' u_j' \rangle$  — тензор напряжений Рейнольдса (угловые скобки — признак осреднения);  $H_i = \langle u_i' \vartheta \rangle$  — вектор турбулентного потока тепла, нормированный на объемную теплоемкость;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\beta = g/T$  — параметр плавучести;  $l$  — параметр Кориолиса ( $l = 2\omega \sin\varphi$ ,  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли,  $\varphi$  — широта);  $R$  — газовая постоянная для сухого воздуха;  $C_p$  — удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении;  $\varepsilon$  — интенсивность конденсации;  $P_0 = 1000$  гПа;  $\tilde{u}_1 = u_1 + U_G$ ;  $\tilde{u}_2 = u_2 + V_G$ ;  $\tilde{u}_3 = u_3$ .

По индексу  $\alpha$  производится суммирование, а  $\delta_{ij}$  — единичный тензор (символ Кронекера):  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$  и  $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$ .

Уравнения (1)–(2) получены путем вычитания из исходных уравнений Рейнольдса для горизонтальных компонент скорости соответствующих геострофических соотношений (6) и (7), в предположении о независимости плотности воздуха от горизонтальных координат, а уравнение (3) — вычитанием из уравнения Рейнольдса для вертикальной скорости уравнения статики (8), которому, как обычно предполагается, удовлетворяет среднее давление  $\bar{P}$  при средней (фоновой) потенциальной температуре воздуха (12) и соответствующей ей молекулярно-кинетической температуре воздуха  $\bar{T}$ .

Компоненты геострофической скорости ветра  $U_G$ ,  $V_G$  играют здесь роль компонентов фоновой горизонтальной скорости ветра и приняты, для простоты, не меняющимися с высотой, что, впрочем, несколько не ограничивает общность, поскольку в противном случае (например, при температурной адвекции в свободной атмосфере) их изменение с высотой совсем нетрудно учесть. То же относится и к фоновым значениям вертикальной скорости, которые предполагается еще и равными нулю.

Все фоновые величины предполагаются известными, поскольку определяются синоптическими процессами на масштабах сотни и тысячи километров и должны, таким образом, браться из соответствующих крупномасштабных моделей.

Аналогично получено и уравнение (4) для переноса в турбулентной атмосфере величин отклонения потенциальной температуры от фоновых своих значений (9), где для простоты учтен только вертикальный градиент фоновой потенциальной температуры (12), который, как известно, существенно превосходит аналогичные горизонтальные градиенты.

Параметризация подсеточной турбулентности предполагает использование упро-

щенной системы уравнения баланса турбулентной энергии  $b = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sigma_i^2$  в локально-

равновесной форме с использованием приближения изотропной турбулентности для коэффициента турбулентного обмена  $K_{ij} = K\delta_{ij}$ , полуэмпирической гипотезы Колмогорова [8] при использовании шага сетки  $\Delta$  в качестве масштаба турбулентности:

$$K = k\Delta^2 \left[ \left( \frac{dV}{dn} \right)^2 - \beta \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x_3} + \gamma_0 \right) \right]^{1/2}, \quad (13)$$

$$R_{ij} = -K \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad H_i = -K \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \gamma_0 \delta_{i3} \right), \quad (14)$$

где величина  $dV/dn$  — полный модуль локального градиента скорости ветра;  $k$  — эмпирическая константа.

### Численная схема

Интегрирование (1)–(4) производится численно с шагом по времени  $\Delta_t$  до момента установления процесса обтекания участка территории. Величина  $\Delta_t$  выбирается на каждом временном шаге с учетом требований обеспечения вычислительной устойчивости для явных схем (критерий Куранта).

Для численного интегрирования (1)–(3) используется метод расщепления [5], где на первом полушаге (перенос и диффузия) интегрировалось конечно-разностное уравнение:

$$\frac{1}{\Delta_t} \left( u_i^{n+1/2} - u_i^n \right) = F_i^n, \quad (15)$$

а на втором полушаге (адаптация поля ветра и давления) использовалось следующее представление:

$$\frac{1}{\Delta_t} \left( u_i^{n+1} - u_i^{n+1/2} \right) = -\frac{\partial \pi^{n+1}}{\partial x_i} + G_i^n, \quad (16)$$

где для простоты приняты обозначения:

$$F_i = -u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial R_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}, \quad (17)$$

$$G_i = l(u_2 - V_G) \delta_{i1} + l(U_G - u_1) \delta_{i2} + \beta \vartheta \delta_{i3}. \quad (18)$$

На первом полушаге используется явная трехмерная конечно-разностная схема типа Лакса–Вендрофа [11] в ее двухслойной интерпретации, которая в наших обозначениях имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\Delta_t} \left( \hat{u}_i^{n+1/2} - u_i^n \right) = F_i^n, \quad (19)$$

$$\frac{1}{\Delta_t} \left( u_i^{n+1/2} - u_i^n \right) = \hat{F}_i^{n+1/2}. \quad (20)$$

На первом этапе по (19) определяется поле-предиктор скорости ветра  $\hat{u}_i^{n+1/2}$ , задаваемое в узлах вспомогательной сетки, сдвинутых относительно основной на полшага по всем направлениям. По этому полю, далее, по (17) вычислялось уточненное значение  $\hat{F}_i^{n+1/2}$ . На втором этапе поле корректируется по (20) с определением, в итоге, скорости после первого полушага в узлах основной сетки.

Для адаптации полей ветра и давления на втором полушаге применим оператор дивергенции к (35) и получим:

$$\frac{\partial^2 \pi^{n+1}}{\partial x_\alpha^2} = \frac{1}{\Delta_t} D^{n+1/2} + \frac{\partial G_\alpha^n}{\partial x_\alpha}, \quad D^{n+1/2} = \frac{\partial u_\alpha^{n+1/2}}{\partial x_\alpha}, \quad (21)$$

так называемое уравнение Пуассона для давления (диагностическое уравнение эллиптического типа), где  $D_i^{n+1/2}$  — дивергенция скорости  $u_i^{n+1/2}$ , причем (21) записано с учетом выполнения уравнения неразрывности (5) на шаге  $n + 1$ . В связи с увеличением общего порядка системы дифференциальных уравнений после получения (21), необходимо сформулировать дополнительные граничные условия для этого уравнения, в качестве которых привлекаются следующие:  $\pi^{n+1} = 0$  на верхней границе и боковых гранях расчетной области и нижнее граничное условие, вытекающее из уравнения (3) при условии  $w_1 = 0$  из (3):

$$-\frac{\partial \pi^{n+1}}{\partial z} + \beta \vartheta^n = 0. \quad (22)$$

В используемом нами варианте численной модели для интегрирования (21) привлекается известный итерационный метод последовательной верхней релаксации [11]. После расчета поля давления с учетом граничных условий (22) осуществляется окончательный расчет поля скорости ветра на шаге  $n + 1$  по (16).

Аналогичным образом производилось интегрирование уравнения (4). Отличие состояло лишь в том, что на первом полушаге с использованием упомянутой выше схемы Лакса—Вендрофа рассчитывался упорядоченный перенос, а на втором полушаге — турбулентная диффузия. Упрощенная структура соответствующих членов в этих уравнения, описывающих турбулентную диффузию, позволяла в этом случае осуществлять дополнительное расщепление по направлениям и использовать для интегрирования на втором полушаге известный метод прогонки.

### **Общая схема учета рельефа**

Общая концепция метода фиктивных областей предполагает наличие некоторой совокупности узлов расчетной сетки, помещаемых внутрь того или иного препятствия и в которых никакие вычисления не производятся. Проблема состоит в описании ограничивающей это препятствие поверхности, на которой требуется, к тому же, ставить граничные условия. В работе [9] был предложен специальный метод такого рода описания, пригодный также и к описанию достаточно тонких (толщиной менее шага сетки) ограждений, суть которого состоит в задании в граничных к поверхности узлах длин и направляющих углов нормалей к этой поверхности (рис. 1).

Наибольшую сложность представляет собой построение собственно гладкой поверхности внешнего ограждения элемента рельефа. Поскольку рельеф для каждой местности задается в форме изолиний его высоты, требуется реализовать некоторую процедуру построения на этой основе непрерывной поверхности. Используемый нами метод реализации подобной процедуры предполагал комбинирование этой

поверхности из совокупности плоскостей треугольной формы, таким образом, как это показано на рис. 2.

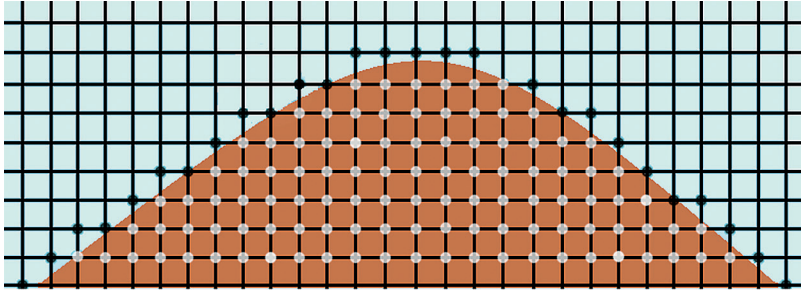


Рис. 1. Общая схема идентификации ограждающей поверхности элемента рельефа в методе фиктивных областей. Внутренние точки — белые, прилегающие к поверхности узлы сетки выделены черным

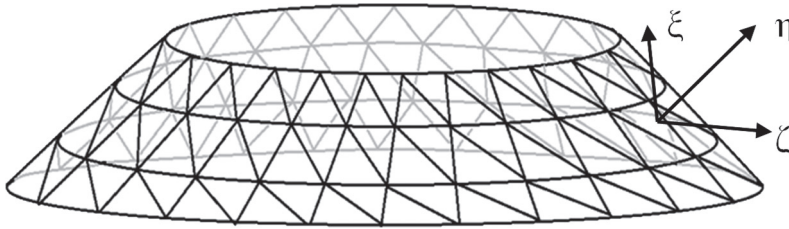


Рис. 2. Схема комбинирования ограждающей поверхности элемента рельефа по произвольной конфигурации его изолиний с примером построения локальной системы координат

Таким образом, в данной цифровой модели вся информация о конфигурации рельефа включала лишь координаты угловых точек ( $L$ ) каждого треугольника ( $k$ ) —  $(x_L^{(k)}, y_L^{(k)}, z_L^{(k)})$ . Далее, для каждой новой формы конфигурации рельефа реализовывалась специальная вычислительная процедура построения нормалей к такого рода треугольникам из ближайших узлов расчетной сетки, характеристики которых (длина, горизонтальный и вертикальный углы) и представляли уже итоговую цифровую модель рельефа, которая и использовалась при задании граничных условий для компонент скорости ветра, температуры и давления

### *Постановка краевых условий*

В качестве начальных условий используем вертикальные профили скорости ветра и температуры, восстановленные на основе данных метеостанции и реанализа с использованием модели АПС над горизонтально-однородной поверхностью [10], причем вертикальная скорость при этом полагалась равной нулю.

На верхней границе расчетной области, располагаемой на высоте как минимум в 2–3 раз превышающих высоту самой высокой точки рельефа, все отклонения от



фоновых значений полагались равными нулю, а на боковых поверхностях расчетной области полагались нулю все производные от искомых величин по нормали к этим поверхностям.

Для задания граничных условий на подстилающей поверхности использовались приближения теории подобия Монина–Обухова (например, [8]) для горизонтально однородного стратифицированного приземного (приводного) слоя. При этом нужно учитывать, что доступной информацией здесь могут являться лишь сведения о шероховатости подстилающей поверхности, температуры поверхности воды (если в область расчета попадает водная среда), а также данные о температуре воздуха на метеостанции.

Сформулируем граничные условия в некоторой локальной системе координат  $(\xi, \zeta, \eta)$ , которая над плоской поверхностью совпадает с осями исходной декартовой системой координат  $(x, y, z)$ , а на поверхности рельефа — вертикальная ось  $\eta$  выбирается совпадающей по направлению с нормалью к поверхности, а ось  $\xi$  (аналог  $x$ ) направляется вдоль вектора локальной скорости ветра. Вертикальная (вдоль  $\eta$ ) скорость ветра в этой локальной системе координат полагается равной нулю  $\hat{w} = 0$  (условие не протекания воздуха через подстилающую поверхность), поперечная скорость  $\hat{v} = 0$  (в силу определения системы координат), а для разности продольных скоростей (вдоль  $\xi$ ) на уровнях  $\eta_2, \eta_1$  расчетной сетки справедливы следующие соотношения теории подобия Монина–Обухова:

$$\hat{u}_2 - \hat{u}_1 = \frac{U_*}{\kappa} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{\varphi_U(\mu)}{\mu} d\mu, \quad \mu = \frac{\eta}{L}, \quad (23)$$

где  $L = -\frac{U_*^3}{\beta \kappa H_0}$  — масштаб длины в теории подобия Монина–Обухова;  $U_*$  — динамическая скорость;  $\kappa \approx 0,4$  — константа Кармана;  $H_0$  — нормированный на объемную теплоемкость турбулентный поток тепла, а для задания универсальной функции  $\varphi_U(\mu)$  используется следующая аппроксимация экспериментальных данных [12], допускающая представление интеграла в (23) в алгебраических выражениях:

$$\varphi_U(\mu) = (1 - 8\mu)^{-1/3}, \quad \mu \leq 0; \quad \varphi_U(\mu) = 1 + 5\mu, \quad \mu > 0. \quad (24)$$

Для расчета  $U_*$  и  $H_0$  по известным значениям уровня шероховатости  $\eta_0$  (где скорость ветра  $\hat{u}(\eta_0) = 0$ ) и температуры на 1-м расчетном уровне  $\vartheta_1 = \vartheta(\eta_k)$  с  $k = 1$  для суши и  $k = 0$  для воды, используется следующая система трансцендентных алгебраических уравнений:

$$\hat{u}_1 = \frac{U_*}{\kappa} \int_{\mu_0}^{\mu_1} \frac{\varphi_U(\mu)}{\mu} d\mu, \quad \mu = \frac{\eta}{L}, \quad L = -\frac{U_*^3}{\beta \kappa H_0}, \quad (25)$$

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = -\frac{H_0}{\kappa U_*} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{\varphi_T(\mu)}{\mu} d\mu, \quad (26)$$



где для аналогичной  $\varphi_U(\mu)$  универсальной функции  $\varphi_T(\mu)$  для градиента температуры также используется соотношение из [12]:

$$\varphi_T(\mu) = 0,7(1 - 35\mu)^{-1/3} + \frac{0,3}{1 + 8\mu^2}, \quad \mu \leq 0; \quad \varphi_T(\mu) = 1 + 6\mu, \quad \mu > 0. \quad (27)$$

Что касается нижнего граничного условия для давления, то его запись в локальной системе координат аналогична (22):

$$-\frac{\partial \pi}{\partial \eta} + \beta \vartheta = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0. \quad (28)$$

**Результаты верификации модели**

Для верификации предложенной модели использовались экспериментальные данные по продувкам элементов рельефа в аэродинамической трубе [13]. Рассматривался одиночный осесимметричный холм, высота которого  $h$  в пересчете на реальную атмосферу составляла 160 м. Сопоставление экспериментальных и расчетных значений полей продольной скорости потока представлены на рис. 3.

Как можно видеть из представленных результатов, предложенная модель как качественно, так и количественно воспроизводит имеющиеся особенности в поле продольной скорости, что свидетельствует о перспективности ее использования для воспроизведения структуры потока над орографически сложными типами подстилающей поверхности.

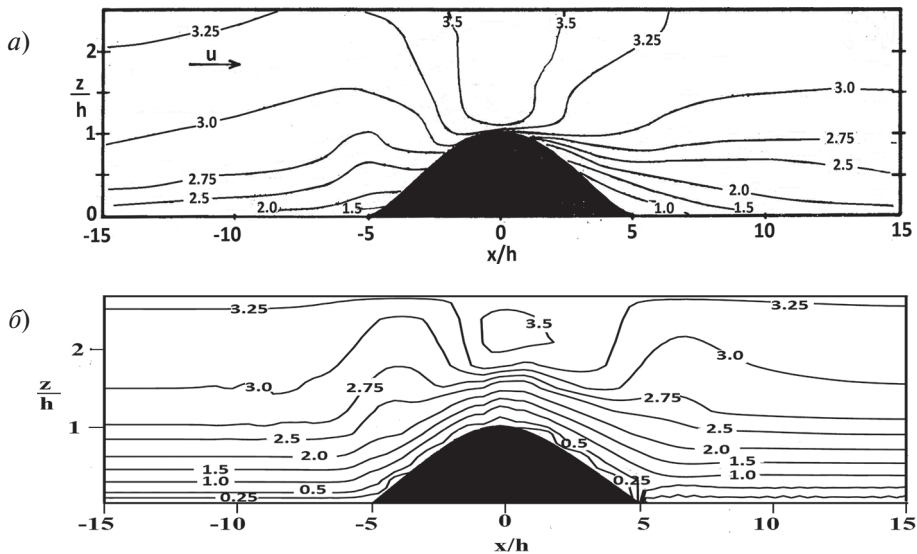


Рис. 3. Сопоставление экспериментальных (а) и расчетных (б) полей продольной скорости для задачи об обтекании одиночного осесимметричного холма

**Литература**

1. *Deardorff J.W.* Three-dimensional numerical study of turbulence in an entraining mixed layer. // *Boundary-Layer Meteorology*, 1974, vol. 7, iss. 2, pp. 199–226.
2. *Thompson J.F.* Numerical solution of flow problems using body-fitted coordinate systems. Ed. W. Kollman. // *Computational fluid dynamics*, 1980, vol. 1, pp. 1–98.
3. *Гутман Л.Н.* Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов. — Л.: Гидрометеоздат, 1969. — 286 с.
4. *Бакланов А.А.* Численное моделирование в рудничной аэрологии. — Апатиты: изд. Кольского филиала АН СССР, 1987. — 200 с.
5. *Пененко В.В., Алоян А.Е.* Модели и методы для задач охраны окружающей среды. — Новосибирск: Наука, 1985. — 254 с.
6. *Гранберг И.Г.* Пространственная задача обтекания препятствия потоком несжимаемой стратифицированной жидкости (численное моделирование). // *Изв. АН СССР, ФАО*, 1983, т. 19, с. 357–365.
7. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — М.: Наука, 1965. — 345 с.
8. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Часть 1. — М.: Наука, 1965. — 639 с.
9. *Баранова М.Е., Гаврилов А.С.* Численное моделирование динамики обтекания турбулентным потоком тонких вертикальных ограждений. // *Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Межвуз. темат. сб. тр. Вып. 10.* — СПб.: СПбГАСУ, 2004, с. 85–94.
10. *Гаврилов А.С., Мханна А., Харченко Е.В.* Верификация модели атмосферного пограничного слоя применительно к задачам прогноза загрязнения атмосферы от очагов лесных пожаров. // *Учёные записки РГГМУ*, 2013, № 31, с. 119–129.
11. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980. — 616 с.
12. *Гаврилов А.С.* Математическое моделирование мезометеорологических процессов. — Л.: ЛПИ, 1988. — 96 с.
13. *Lawson R.E. Jr, Snyder W.H., Thompson R.S.* Estimation of maximum surface concentrations from sources near complex terrain in neutral flow. // *Atmospheric environment*, 1989, vol. 23, no. 2, pp. 321–331.