А.Н. Постников

ДОПОЛНЕННОЕ УРАВНЕНИЕ РЕЧНОЙ ГИДРАВЛИКИ

A.N. Postnikov

ADDED RIVER HYDRAULICS EQUATION

По аналогии с уравнениями движения вязкой несжимаемой жидкости Рейнольдса произведено дополнение основного уравнения речной гидравлики (уравнения Сен-Венана) членом, содержащим осредненное произведение пульсаций скорости. Обоснована необходимость этого дополнения. Предложено выражение для представления нового члена уравнения.

Ключевые слова: новый член в уравнении Сен-Венана, учет пульсаций скорости, предложение для представления нового члена уравнения.

By analogy with Reynolds equations of motion for viscous incompressible fluid the basic river hydraulics equation (Saint-Venan`s equation) is modified with adding the new term containing average product of velocity pulsations. Necessity of the addition is grounded. The expression for giving an idea of the new equation term is suggested.

Key words: new term in Saint-Venan`s equation, taking into account velocity pulsations, suggestion for assignment new term of the equation.

Как известно, вершиной классической механики жидкостей и газа, которая до сравнительно недавнего времени называлась гидромеханикой, являются уравнения вязкой несжимаемой жидкости — уравнения Навье–Стокса. Эти уравнения в совокупности с уравнением неразрывности образуют замкнутую систему уравнений и, в принципе, такая система может быть решена. Однако, в связи с непреодоленными математическими затруднениями, аналитические решения были получены только для наиболее простых одномерных движений. Например, для движения жидкости в круглой трубе. Затем было установлено, что расчеты гидродинамических величин по полученным в результате этих решений формулам дают удовлетворительные результаты только для потоков с достаточно малыми скоростями движения, когда турбулентность в этих потоках развита достаточно слабо.

Для потоков с развитой турбулентностью Рейнольдс предложил свои уравнения, полученные на основе уравнений Навье–Стокса, в которых каждая гидродинамическая величина A была представлена в виде суммы ее среднего значения $\overline{A}$ и отклонения от него A' (пульсации), т.е. в виде $A = \overline{A} + A'$. Затем было произведено осреднение всех членов уравнений. В результате этого были получены уравнения для осредненного турбулентного движения, которые с формальной точки можно рассматривать как уравнения Навье–Стокса, дополненные членами вида

$$\frac{-\partial\rho\overline{v'_j\, v'_k}}{\partial x_k}. \tag{1}$$

Шесть различных величин

$$-\rho\overline{v'_j\, v'_k}, \tag{2}$$

вошедших в уравнения Рейнольдса, называются турбулентными напряжениями. Здесь v_i, v_k — пульсации скорости вдоль осей j и k. В декартовой системе координат как j, так и k поочередно именуются как x, y, z; x_k — поочередно записывается как x, y, z.

Система вязкой несжимаемой жидкости, содержащая уравнения Навье–Стокса и уравнение неразрывности является системой замкнутой, т.е. число неизвестных равно числу уравнений. Система уравнений Рейнольдса — система незамкнутая, так как здесь число неизвестных превосходит число уравнений.

Приведенные извлечения из учебников по гидромеханике понадобятся нам при рассмотрении основного уравнения речной гидравлики — уравнения Сен-Венана

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v^2}{2\partial x}=g\left(i-\frac{\partial h}{\partial x}\right)-\frac{gv^2}{C^2R}, \tag{3}$$

где v — скорость течения; t — время; x — координатная ось, направленная вдоль потока; i — уклон поверхности дна потока; h — глубина потока; R — гидравлический радиус; C — коэффициент Шези; g — ускорение свободного падения.

Скорость в уравнении (3) осреднена по двум поперечным координатным осям, но не осреднена вдоль по потоку. Поэтому, если проводить аналогию с уравнениями Навье–Стокса, то напрашивается вывод о том, что для потоков с развитой турбулентностью уравнение (3) обладает теми же недостатками, что и уравнения Навье–Стокса. Поэтому, следуя Рейнольдсу, представим в левой части (3) скорость в виде суммы $v=\bar{v}+v'$. Скорость в последнем члене уравнения, выражающем силы сопротивления, по такой форме представлять не будем, поскольку выражение для сил сопротивления вынужденно заимствовано у Шези, который рассматривал равномерные турбулентные движения и под v понимал среднюю за некоторый промежуток времени скорость потока. Поэтому будем относиться к этому выражению сил сопротивления как к данному по определению. После осреднения каждого члена уравнения получим

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1\partial v^2}{2\partial v}=g\left(i-\frac{\partial h}{\partial x}\right)-\left(\frac{gv^2}{C^2R}+\frac{1}{2}\frac{\overline{\partial v'^2}}{\partial x}\right), \tag{4}$$

где v — средняя за некоторый промежуток времени скорость потока. Знак осреднения (черта сверху) здесь отсутствует, его можно не ставить, если помнить о совершенном осреднении. Уравнение (4) мы и назвали дополненным уравнением речной гидравлики или дополненным уравнением Сен-Венана.

Попытаемся проанализировать, к чему приводит появление нового члена уравнения $\frac{1}{2}\frac{\overline{\partial v'^2}}{\partial x}$. Величина $\overline{v'^2}$ — средний квадрат отклонения от среднего значения скорости, т.е. дисперсия скорости. Будем считать, как и Шези, что при равномерном движении значение $\overline{v'^2}$ равно нулю. В действительности такого, по-видимому, быть не может, поэтому смягчим утверждение: при равномерном движении значение $\overline{v'^2}$ близко к нулю. Рассмотрим теперь последовательно фазы подъема и спада паводка (половодья). Во время подъема уровни и скорости течения вдоль оси x убывают. Поэтому логично считать, что ниже по течению по сравнению с тем створом, где находится наблюдатель, характер движения водных масс гораздо ближе к равномерному ($\overline{v'^2} \approx 0$), чем в створе наблюдателя, т.е. величина $\overline{v'^2}$ убывает вниз по течению, но это означает, что $\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x} < 0$.

Во время спада уровни и скорости вдоль оси х возрастают, поэтому теперь характер движения водных масс будет ближе к равномерному в створе наблюдателя, чем ниже по течению, и теперь $\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x} > 0$.

Таким образом, на фазе подъема силы сопротивления движению будут меньше, а на фазе спада — больше на величину $\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x}$ по сравнению с традиционной величиной $\frac{gv^2}{C^2 R}$.

В работе [1] автор пришел к аналогичному выводу об изменениях сил сопротивления на фазах подъема и спада паводка. Здесь уместно кратко изложить основные моменты этой работы. Сила сопротивления движению жидкости ($F_с$) есть реакция (ответ) на действие силы, вызывающей это движение ($F_в$). При равномерном движении значения обеих сил — одни и те же во все моменты времени. На фазах подъема и спада паводка происходит непрерывное изменение силы ($F_в$), что вызывает также непрерывное изменение силы ($F_с$). Но на формирование любого ответа необходимо время. Поэтому v — скорость течения в последнем члене уравнения (3), выражающем силу сопротивления, не может быть скоростью в данный момент времени. Это должна быть скорость в момент времени, сдвинутый назад во времени на некоторую величину Δt. Но тогда получается, что при одной и той же скорости на фазах подъема и спада сила сопротивления в первом случае будет меньше, а во втором больше традиционной $\frac{gv^2}{C^2 R}$. Заодно отметим, что если это так, то тогда, по-видимому, можно утверждать также, что при разгоне любого тела внутри жидкости силы сопротивления будут меньше, а при торможении тела будут больше при одинаковых скоростях в первом и втором случаях.

В уравнении (4) v в члене $\frac{gv^2}{C^2 R}$ — скорость в данный момент времени, что приводит к завышению значения силы сопротивления на фазе подъема и к занижению этой силы на фазе спада. Новый член уравнения $\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x}$ устраняет это несоответствие.

Считается, что уравнение (3) вместе с уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad (5)$$

составляют замкнутую систему уравнений речной гидравлики. Здесь ω — площадь поперечного сечения потока; Q — расход воды.

Уравнения (4) и (5) не составляют замкнутую систему, так как требуется еще одно уравнение для представления члена $\frac{1}{2}\overline{\frac{\partial v'^2}{\partial x}}$. Автор данной работы в настоящее время не готов дать обоснованного представления такого уравнения и может только предположить, что $\overline{\frac{\partial v'^2}{\partial x}}$ связано с характеристикой перепада избыточного давления вдоль потока, т.е. с переменной $g\frac{\partial h}{\partial x}$, например, так

$$\overline{\frac{\partial v'^2}{\partial x}} = ag\frac{\partial h}{\partial x}, \qquad (6)$$

где a — коэффициент пропорциональности, значение которого может быть подобрано при решении системы уравнений (4) и (5) методом конечных разностей. Значение этого коэффициента должно быть меньше единицы, так как правая часть уравнения (6) есть часть силы сопротивления, возникающей в ответ на действие части силы, вызывающей движение $g\frac{\partial h}{\partial x}$, поэтому первая из названных здесь сил не может быть больше второй.

Автору хотелось бы надеяться, что изложенное в настоящей работе вызовет обсуждение среди специалистов в области речной гидравлики и может оказаться полезным в их научной и практической деятельности.

Литература

1. *Постников А.Н.* Гипотеза о силе сопротивления в уравнении Сен-Венана. // Учёные записки РГГМУ, 2009, № 8, с. 28–31.