М.Ю. Белевич

О «СПЕКТРАЛЬНОЙ» ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРОМЕХАНИКИ. III. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КАК ЗАМЕНА БАЗИСА И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ

M.Yu. Belevich

ON THE «SPECTRAL» FORM OF THE FLUID MECHANICS EQUATIONS. III. INTEGRAL TRANSFORMS AS THE CHANGE OF BASIS AND INTEGRAL RALATIONS OF THE FLUID MECHANICS

В третьей части работы [1, 2] изучаются интегральные преобразования. Они интерпретируются как замена базиса бесконечномерных тензоров. В частности, обсуждается замена переменных под знаком интеграла. Рассматриваются также интегральные законы сохранения на примере механики жидкости.

Ключевые слова: преобразование Фурье, интегральные преобразования, законы сохранения, спектральные уравнения.

In the third part of the research [1, 2] integral transforms are studied. They are interpreted as the change of basis of infinite dimensional tensors. In particular, the change of variables in integrals is discussed. The integral conservation laws of the fluid mechanics are also considered.

Key words: Fourier transform, Integral transforms, conservation laws, spectral equations.

Замена базисных векторов

Замена одного множества базисных элементов другим множеством приводит к необходимости пересчета компонент векторов. В конечномерном случае такое действие сводится к умножению вектора на соответствующую матрицу линейного оператора (матрицу преобразования), а в изучаемом бесконечномерном случае — осуществляется путем применения, так называемого *интегрального преобразования*.

Рассмотрим помимо исходного декартова базиса $\{\bar{e}_x\}_{x\in\mathbb{R}^1}$ новый базис $\{\bar{\varepsilon}_k\}_{k\in\mathbb{R}^1}$, связанный с исходным соотношениями

$$\bar{\varepsilon}_k = \int_x \Lambda_k^x \bar{e}_x, \quad \bar{e}_x = \int_k \mathrm{V}_x^k \bar{\varepsilon}_k. \tag{1}$$

Мы считаем, что величины Λ_k^x, являющиеся компонентами векторов $\bar{\varepsilon}_k$ в базисе $\{\bar{e}_x\}$, суть компоненты $\binom{x}{k}$ матрицы Λ с несчетным количеством строк и столбцов. Аналогично, V_x^k — координаты векторов $\bar{e}_x$ в базисе $\{\bar{\varepsilon}_k\}$, являются компонентами $\binom{k}{x}$ обратной матрицы $\mathrm{V} = \Lambda^{-1}$. При этом, мы полагаем, что Λ^{-1} существует и такова, что

$$\left(\mathrm{V}\Lambda\right)_k^{\nu} = \int_x \mathrm{V}_x^{\nu} \Lambda_k^x = \delta_k^{\nu}. \tag{2}$$

Вектор $\overline{f}$, имевший в старом базисе $\{\overline{e}_x\}$ набор компонент $f = \{f^x\}$, в новом базисе $\{\overline{\varepsilon}_k\}$ будет иметь набор компонент $\phi = \{\phi^k\}$. Связь новых компонент со старыми можно получить, рассмотрев следующие цепочки равенств

$$\overline{f} = \int_x f^x \overline{e}_x = \int_x f^x \int_k \mathrm{V}_x^k \overline{\varepsilon}_k = \int_k \left(\int_x \mathrm{V}_x^k f^x \right) \overline{\varepsilon}_k = \int_k \phi^k \overline{\varepsilon}_k,$$
$$= \int_k \phi^k \overline{\varepsilon}_k = \int_k \phi^k \int_x \Lambda_k^x \overline{e}_x = \int_x \left(\int_k \Lambda_k^x \phi^k \right) \overline{e}_x = \int_x f^x \overline{e}_x.$$

Сравнивая полученные выражения, находим, что $\phi = \mathrm{V}f$ и $f = \Lambda\phi$, или в компонентах

$$\phi^k = \int_x f^x \mathrm{V}_x^k \Rightarrow \phi(k) = \int_x f(x) \mathrm{V}(k;x)\, dx, \tag{3}$$

$$f^x = \int_k \phi^k \Lambda_k^x \Rightarrow f(x) = \int_k \phi(k) \Lambda(x;k)\, dk. \tag{4}$$

Первое выражение носит название *прямого преобразования*, а второе — *обратного*.

Преобразование компонент 1-форм осуществляется аналогично. Рассмотрим, наряду с базисом $\{\tilde{\sigma}^y\}$, другой базис $\{\tilde{\vartheta}^m\}_{m\in\mathbb{R}^1}$, дуальный базису $\{\overline{\varepsilon}_k\}$. Оба базиса 1-форм связаны друг с другом следующими соотношениями

$$\tilde{\sigma}^y = \int_m \tilde{\vartheta}^m \Lambda_m^y, \quad \tilde{\vartheta}^m = \int_y \tilde{\sigma}^y \mathrm{V}_y^m. \tag{5}$$

Произвольная 1-форма $\tilde{q}$ в старом и новом базисах будет иметь наборы компонент $q = \{q_y\}$ и $\eta = \{\eta_m\}$ соответственно. Легко видеть, что связь новых компонент со старыми дается выражениями $q = \mathrm{V}\eta$ и $\eta = \Lambda q$, или в координатах

$$q_y = \int_m \mathrm{V}_y^m \eta_m \Rightarrow q(y)dy = \int_m \mathrm{V}(m;y)dy\, \eta(m)dm, \tag{6}$$

$$\eta_m = \int_y \Lambda_m^y q_y \Rightarrow \eta(m)dm = \int_y \Lambda(y;m)dm\, q(y)dy. \tag{7}$$

О традиционной интерпретации индексов

Величины, нумерующие компоненты c-тензоров, т.е. величины, рассматриваемые здесь как индексы, часто ассоциируются с компонентами так называемого радиуса-вектора, начинающегося в начале координат и указывающего на точку с координатами, равными его компонентам. В этом случае соответствующую трактовку должны получить и новые индексы, появляющиеся в результате интегрального преобразования. Некоторые соображения по поводу такой трактовки можно получить следующим образом.

Рассмотрим применение к $\overline{f}$ интегрального преобразования. В результате последовательного применения прямого и обратного преобразования компонента f^x c-вектора $\overline{f}$ преобразуется в компоненту f^y:

$$f^y = \int_k \Lambda_k^y \underbrace{\int_x \mathrm{V}_x^k f^x}_{\phi^k}.$$

В координатной форме это запишется так

$$f(y)=\int_k \Lambda(y;k)\,dk \underbrace{\int_x \mathrm{V}(k;x)\,f(x)\,dx}_{\phi(k)}. \qquad (8)$$

Пусть величина $f^{\,x}$ (или $f\,(x)$) интерпретируется как некоторая размерная физическая характеристика. Тогда, если обозначить физическую размерность $f^{\,x}$ через $[f^{\,x}]$, получим $[f^{\,x}] = [f^{\,y}]$ и $[\Lambda_k^y\, V_x^k] = 1$. Размерность $[\phi^k]$ равна $[\mathrm{V}_x^k][f^{\,x}]$ и определяется размерностью $[\mathrm{V}_x^k]$ или в координатной форме

$$\left[\phi(k)\right]=\left[f(x)\right]\left[\mathrm{V}(k;x)\right]\left[dx\right].$$

Если $[\mathrm{V}_x^k] = 1$, то $[f^{\,x}] = [\phi^k]$, $[\Lambda_k^y] = [\mathrm{V}_x^k]$, а также $[\mathrm{V}(k;x)][dx] = 1$ и $[\Lambda(y;k)][dk] = 1$. Так, например, в случае интегрального преобразования Гильберта

$$\mathrm{V}_x^k=\frac{1}{\pi}\frac{1}{k-x}dx, \quad \Lambda_k^y=\frac{1}{\pi}\frac{1}{x-k}dk$$

размерности величин x и k одинаковы, $[k] = [x]$, и обе величины естественно интерпретировать, как компоненты радиусов-векторов, исходного и результирующего.

Если $[\mathrm{V}_x^k] = [dx] = [x]$, имеем $[\mathrm{V}(k;x)] = 1$, а также $[\phi^k] = [f^{\,x}][x]$ и $[\Lambda(y;k)] = 1$. В таких преобразованиях как, например,

$$\mathrm{V}_x^k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikx}dx, \quad \Lambda_k^y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}dk \quad \left(\text{преобразование Фурье}\right),$$

$$\mathrm{V}_x^k=e^{-kx}dx, \qquad \Lambda_k^y=\frac{1}{2\pi i}e^{kx}dk \quad \left(\text{преобразование Лапласа}\right),$$

и другие, размерности индексов x и k обратны друг другу, так что $[k][x] = 1$. Если величину x интерпретировать как компоненту радиуса-вектора относительно декартова базиса, то величину k естественно интерпретировать как компоненту 1-формы относительно дуального базиса, а kx — как их свертку. В многомерном случае соответственно имеем: $\mathbf{x} = x^j\mathbf{e}_j$ — элемент векторного пространства радиусов-векторов, $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^{n}$ — базис этого пространства, $\mathbf{k} = k_i\,\tilde{\mathbf{e}}^i$ — элемент дуального пространства 1-форм, $\{\tilde{\mathbf{e}}^i\}_{i=1}^{n}$ — дуальный базис, т.е. такой, что $\tilde{\mathbf{e}}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i$, $\mathbf{k}(\mathbf{x}) = k_i\,x^i$ — свертка.

Фаза и кинематические законы сохранения

Стандартно фазой называют величину $\theta \equiv -\omega t + \mathbf{k}(\mathbf{x})$. Совокупность значений n индексов (как правило, трех) интерпретируется как радиус-вектор $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$, где x^i — декартовы координаты точки пространства мест, тогда как, так называемый, волновой вектор $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$, как уже отмечалось, следует трактовать как 1-форму. Значение 1-формы $\mathbf{k}$ на радиусе-векторе $\mathbf{x}$, т.е. $\mathbf{k}(\mathbf{x})$ отличается от фазы слагаемым $-\omega t$. Если, однако, вместо вектора $\mathbf{x}$ и 1-формы $\mathbf{k}$ рассматривать 4-мерные вектор $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ и

1-форму $k = (k_0, k_1, k_2, k_3)$, то фаза определится величиной $\theta = k(x) = k_\alpha x^\alpha$, где $\alpha = 0, ..., 3$. Слагаемое $-\omega t = k_0 x^0$ получим, если нулевые компоненты будут соответственно равны $x^0 = ict$ и $k_0 = i\omega/c = -\omega/ic$.

Дифференцируя фазу $\theta = -\omega t + k_j x^j$ ($j = 1, 2, 3$), найдем

$$\partial_t \theta = \omega, \qquad \partial_\omega \theta = t,$$
$$\partial_{x^j} \theta = k_j, \quad \partial_{k_j} \theta = x^j,$$

или $\partial_{x^\alpha} \theta = k_\alpha$, $\partial_{k_\alpha} \theta = x^\alpha$. Первое из этих двух выражений, записанное в бескоординатной форме, и его внешняя производная дают так называемые кинематические законы сохранения

$$d\theta = k, \quad dd\theta = 0.$$

В стандартных трехмерных обозначениях те же кинематические законы сохранения имеют вид

$$\omega(t, \mathbf{x}) = -\partial_t \theta, \quad \mathbf{k}(t, x) = \nabla\theta,$$

и (в результате перекрестного дифференцирования (9))

$$\partial_t \mathbf{k} + \nabla\omega = 0, \quad \nabla \times \mathbf{k} = 0.$$

Эти законы вытекают из определения фазы. Для их замыкания требуется задать связь ω и $\mathbf{k}$ (дисперсионное соотношение), которая отражает специфику конкретного моделируемого физического явления. В результате система (9)–(10) становится полностью определенной и позволяет однозначно определить ω, $\mathbf{k}$ как функции t, $\mathbf{x}$.

Замена переменных

Существует широко используемый специальный вариант замены базисных векторов, известный в бесконечномерном случае как «замена независимых переменных» или «замена координат». Поскольку базисом является упорядоченный набор линейно независимых векторов, изменение упорядоченности при том же составе базисных элементов, трактуется как изменение базиса.

В конечномерном случае изменение упорядоченности базисных векторов осуществляется с помощью ортогональной матрицы А, которая получается из соответствующей единичной матрицы перестановкой строк или столбцов. Если $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^n$ базис n-мерного векторного пространства, то совокупность векторов $\{\bar{\ell}_j\}_{j=1}^n$ вида $\bar{\ell}_j = \mathrm{A}_j^i e_i$ также образует базис, поскольку состоит из тех же самых элементов, но по-иному занумерованных. Компоненты произвольного вектора $\bar{f}$ в обоих базисах связаны соотношением

$$\bar{f} = \phi^j \bar{\ell}_j = \phi^j \mathrm{A}_j^i \bar{e}_i = f^i \bar{e}_i \Rightarrow \phi^j \mathrm{A}_j^i = f^i.$$

В общем случае, в силу того, что замена базиса сводится к перенумерации базисных векторов, компоненты (координаты) изучаемых векторов также меняются только местами, сохраняя прежние численные значения. Таким образом, нет необходимости пересчитывать компоненты векторов, т.е. вычислять соответствующие скалярные произведения. Достаточно отобразить исходное множество индексов (значений координат) на новое. Так, если $f = \{f^x\}$ — компоненты c-вектора $\bar{f}$ в исходном базисе, а $\xi : y \mapsto x$ — взаимнооднозначное отображение связывающее новые и старые номера базисных элементов, то компоненты $\phi = \{\phi^y\}$ того же вектора в новом (по-новому занумерованном) базисе находятся из соотношения

$$\phi^y = \int_x f^x \delta_x^{\xi(y)} = f^{\xi(y)} \Rightarrow \phi(y) = \int_x f(x)\delta(\xi(y) - x)dx = f(\xi(y)),$$

или $\phi = \Pi f$, где Π континуальный аналог матрицы преобразования A^{-1}, имеющий компоненты вида $\delta_x^{\xi(y)}$.

Компоненты 1-форм преобразуются аналогично. Пусть $q = \{q_x\}$ — компоненты 1-формы $\tilde{q}$ в исходном базисе, тогда в новом базисе та же 1-форма имеет компоненты $\eta = \{\eta_y\}$:

$$\eta_y = \int_x \delta_{\xi(y)}^x q_x = q_{\xi(y)} \Rightarrow \eta(y)dy = \int_x \left(\delta(x - \xi(y))d(\xi(y))\right)q(x)dx = \\ = q(\xi(y))d(\xi(y)),$$

или $\eta = Pq$, где $P = \Pi^{-1}$ аналог матрицы преобразования A, имеющий компоненты вида $\delta_{\xi(y)}^x$.

В общем тензорном случае связь компонент, соответствующих различным базисам, дается отображением $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, где n — ранг c-тензоров рассматриваемого линейного пространства. Известные в гидромеханике преобразования эйлеровых координат в лагранжевы и обратно являются именно такой заменой базиса. Эйлеровы координаты суть индексы, зависящие от времени (параметра мировой линии), в то время как лагранжевы координаты являются независящими от времени индексами.

Преобразование производных (интегрирование по частям)

Пусть $\bar{h} = \int_x h^x \bar{e}_x$. Тогда при замене базиса, производная $(\partial_x h)^x$ преобразуется в соответствии со следующей цепочкой равенств.

$$\begin{aligned} \int_x M_x^k (\partial_x h)^x &= \int_x M_x^k \lim_{\Delta \to 0} \frac{h^{x+\Delta} - h^x}{\Delta} = \lim_{\Delta} \left(\frac{1}{\Delta} \int_x M_x^k h^{x+\Delta} - \frac{1}{\Delta} \int_x M_x^k h^x \right) = \\ &= \lim_{\Delta} \left(\frac{1}{\Delta} \int_x M(k;x)h(x+\Delta)dx - \frac{1}{\Delta} \int_x M(k;x)h(x)dx \right) = \\ &= \lim_{\Delta} \left(\frac{1}{\Delta} \int_{y-\Delta} M(k;y-\Delta)h(y)dy - \frac{1}{\Delta} \int_y M(k;y)h(y)dy \right) = \\ &= -\int_y \lim_{\Delta} \frac{M(k;y) - M(k;y-\Delta)}{\Delta} h(y)dy = -\int_y (\partial_y M)_y^k h^y. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $y \equiv x + \Delta$. Предполагается, что как $\partial_x h$, так и $\partial_y M$ существуют, в противном случае появляются дополнительные члены, связанные с границами непрерывности.

Интегрирование по частям требует непрерывной дифференцируемости функций. Если функция отлична от нуля лишь на отрезке $[a, b]$ и имеет разрывы на концах отрезка, то можно разбить область $(-\infty, \infty)$ на три подобласти $(-\infty, a) \cup [a, b] \cup (b, \infty)$ и, далее, интегрировать по частям только на отрезке $[a, b]$.

Пример. Пусть $u = 0$ вне $[a, b]$, а также

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(k) e^{-ikx} dk,$$

$$U(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b u(x) e^{ikx} dx.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_{xx} u e^{ikx} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \partial_{xx} u e^{ikx} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left(\partial_x u e^{ikx} \right)_a^b - ik \int_a^b \partial_x u e^{ikx} dx \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left(\left(\partial_x u - iku \right) e^{ikx} \right)_a^b + (ik)^2 \int_a^b u e^{ikx} dx \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left(\partial_x u - iku \right) e^{ikx} \right)_a^b - k^2 U. \end{aligned}$$

Применение

Переход от одного базиса к другому, обычно, имеет целью упрощение задачи. Использование в качестве базисных элементов набора собственных функций какого-либо оператора, приводит к тому, что действие оператора сводится к умножению на соответствующее собственное число. Выбор прямого и обратного преобразования удобно связать, таким образом, с тем или иным оператором задачи. Вместе с тем, для того чтобы набор собственных функций оператора мог служить базисом, он должен отвечать определенным требованиям (полноты и проч.).

Некоторые операторы обладают рядом привлекательных свойств. Так, если оператор, с плотной в $L_2(\mathbb{R}^1)$ областью определения, симметричен, его спектр веществен. Если же, кроме того, оператор самосопряжен, его остаточный спектр пуст. Известны, например, следующие результаты (см. [5, 4]):

1. Оператор $A_1 f = -f''$ с областью определения

$$D(A_1) = \left\{ f(x) \in L_2(\mathbb{R}^1) : f''(x) \in L_2(\mathbb{R}^1) \right\}$$

самосопряжен и имеет чисто непрерывный спектр, совпадающий с неотрицательной вещественной полуосью. Собственной функцией, отвечающей собственному числу λ, является $f(x) = \exp(\pm i\sqrt{\lambda}\, x)$.

2. Оператор $A_2 f = if'$ с областью определения

$$D(A_2) = \left\{ f(x) \in L_2(\mathbb{R}^1) : f'(x) \in L_2(\mathbb{R}^1) \right\}$$

самосопряжен и имеет чисто непрерывный спектр, совпадающий с вещественной осью. Собственной функцией, отвечающей собственному числу λ, является $f(x) = \exp(i\lambda x)$.

3. Оператор $A_3 f(x) = xf(x)$ умножения на x, такой, что

$$D(A_3) = \left\{ f(x) \in L_2(\mathbb{R}^1) : x f(x) \in L_2(\mathbb{R}^1) \right\}$$

самосопряжен и имеет чисто непрерывный спектр, совпадающий с вещественной осью. Собственной функцией, отвечающей собственному числу λ, является $f(x) = \delta(\lambda - x)$.

Во всех трех примерах собственные функции, отвечающие какому-либо собственному числу λ, не принадлежат $L_2(\mathbb{R}^1)$. Однако для каждого λ можно построить, так называемую, приближенную собственную функцию в виде волнового пакета $\alpha(x)\exp(i\lambda x)$.

В пространстве $\mathcal{F}$ можно определить аналогичные операторы. Именно:

1. $A_1\overline{f} = -\int_x \left(\partial_{xx} f^x\right)\overline{e}_x, \quad D(A_1) = \left\{\overline{f} \in \mathcal{F} : A_1\overline{f} \in \mathcal{F}\right\},$

2. $A_2\overline{f} = i\int_x \left(\partial_{x} f^x\right)\overline{e}_x, \quad D(A_2) = \left\{\overline{f} \in \mathcal{F} : A_2\overline{f} \in \mathcal{F}\right\},$

3. $A_3\overline{f} = -\int_x \left(x f^x\right)\overline{e}_x, \quad D(A_3) = \left\{\overline{f} \in \mathcal{F} : A_3\overline{f} \in \mathcal{F}\right\}.$

Спектры во всех случаях, очевидно, те же, а собственные функции являются элементами $\mathcal{F}$.

Интегральные законы сохранения механики жидкости

Для того чтобы понять, каким интегральным соотношениям соответствует «спектральная» форма уравнений гидромеханики (которая будет получена в следующей части работы), запишем исходные законы сохранения на языке c-тензоров. При этом обратим внимание на два обстоятельства.

1. Интегрирование, в отличие от дифференцирования, операция c-тензорная (свертка двух c-тензоров по паре индексов). По этой причине все утверждения, высказанные в форме интегральных соотношений, не зависят от выбранного базиса и одинаково справедливы в любом из них. Вычисление производной, напротив, напрямую зависит от выбора базиса, так как производная по некоторой переменной, по существу, описывает скорость изменения значений компонент c-тензора при изменении их номера. Номер же компоненты и есть переменная, по которой производится дифференцирование. Таким образом, для формулировки дифференциальных законов сохранения введение координат (индексов) необходимо.

2. В предлагаемой трактовке функций как c-тензоров количество аргументов функции, связанное с размерностью физического пространства, определяет ранг соответствующего c-тензора. Интегральные же соотношения по своей структуре таковы, что допускают интерпретацию в терминах c-тензоров произвольного ранга, а, следовательно, одинаково справедливы в физических пространствах любой размерности. Размерность физического пространства, диктуемая внешними причинами, никак не сказывается на интегральных законах сохранения.

Напомним, вкратце, законы сохранения, изучаемые в гидромеханике. Наиболее удобным для целей настоящего исследования является четырехмерная причинно-обусловленная модель сплошной среды предложенная в [3].

Пусть $\mathcal{B}$ — жидкое тело, множество в топологическом пространстве, а $\{\phi^t\}$ — семейство диффеоморфных отображений $\phi^t: \mathcal{B} \to \mathcal{W}$ тела $\mathcal{B}$ в пространство событий $\mathcal{W}$, занумерованное вещественным параметром t, называемым *временем*. Предполагается, далее, что размерность пространства событий равна четырем. Объединение образов этого отображения есть многообразие $\mathcal{B}^4$, называемое *мировой трубкой* тела $\mathcal{B}$. Если считать тело $\mathcal{B}$ состоящим из точек $\{X, Y, ...\}$, то указанное семейство отображений порождает *мировые линии* точек тела (мировая трубка есть конгруэнция таких мировых линий). Фазовая скорость точки тела есть, по определению, четырехмерный вектор $\vec{v} = d_t$, касательный к мировой линии этой точки тела. Метрику пространства событий удобно выбрать так, чтобы модуль фазовой скорости всюду, где она определена, был постоянен (скажем, равен единице $|\vec{v}| = 1$).

На теле $\mathcal{B}$ и в пространстве $\mathcal{W}$ определяются меры $\mu(\mathcal{B})$ и $\sigma(\mathcal{W})$, соответственно. Они гомеоморфно отображаются (это условие отсутствия пересечений мировых линий) на меры $m(\mathcal{B}_t)$ и $V(\mathcal{B}_t)$ сечения мировой трубки $\mathcal{B}_t$, соответствующего значению параметра t. Исследуется фазовый поток $(\mathcal{B},\{\phi^t\})$, такой, что образ $m(\mathcal{B}_t)$ меры $\mu(\mathcal{B})$ не зависит от времени. Это дает нам первый (и, по существу, единственный) интегральный закон сохранения

$$m\left(\mathcal{B}_t\right) = \mathrm{const} \Rightarrow d_t m\left(\mathcal{B}_t\right) = 0. \quad (12)$$

Если меру m мыслить как массу сечения мировой трубки, то (12) есть *закон сохранения массы*. Если же m интерпретировать как энергию $\mathcal{B}_t$, то получим *закон сохранения энергии*.[1]

Полагая, что мера $m(\mathcal{B}_t)$ абсолютно непрерывна относительно меры $V(\mathcal{B}_t)$, в соответствии с теоремой Радона-Никодима, получим связь между этими двумя мерами:

$$m\left(\mathcal{B}_t\right) = \int_{V\left(\mathcal{B}_t\right)} \rho dV, \quad (13)$$

где функция ρ есть производная меры m по мере V. Если m — масса, то ρ — плотность массы. Вводя, далее, обозначение $\Omega = V(\mathcal{B}_0)$ для некоторого отсчетного значения

[1] Такая интерпретация возможна, так как выше мы определили фазовый поток условием $|\vec{v}| = 1$ всюду на мировой трубке и, следовательно, энергия сечения мировой трубки численно равна половине его массы.

объема, запишем $dV = J(t)d\Omega$, где $J(t)$ — функция, описывающая изменение бесконечно малого объема dV во времени. Связь между массой и отсчетным объемом Ω дается теперь выражением

$$m\left(\mathcal{B}_t\right) = \int_\Omega \rho J\left(t\right) d\Omega, \tag{14}$$

а интегральный закон сохранения (12) записывается в виде

$$\int_\Omega d_t\left(\rho J\right) d\Omega = 0. \tag{15}$$

Это равенство справедливо для произвольной конфигурации (т.е. сечения мировой трубки) любого тела или его части. Дифференциальный закон сохранения (известный как уравнение неразрывности) получается из допущения непрерывности подынтегрального выражения. В этом случае имеем

$$d_t\left(\rho J\right) = 0, \tag{16}$$

или, после вычисления производной (детали см. [6]),

$$\operatorname{div}\left(\rho\vec{v}\right) = 0. \tag{17}$$

Когда мера $m(\mathcal{B}_t)$ интерпретируется как энергия тела, вместо (15), (16) и (17) получим интегральный и дифференциальный законы сохранения энергии, соответственно

$$\int_\Omega d_t\left(\kappa J\right) d\Omega = 0 \Rightarrow d_t\left(\kappa J\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{div}\left(\kappa\vec{v}\right) = 0, \tag{18}$$

где κ — плотность кинетической энергии тела.

Инвариантное описание сохраняющихся величин

Сформулируем теперь полученные выше законы сохранения в терминах c-тензоров. Поскольку мы рассматриваем 4-мерное пространство событий $\mathcal{W}$, все функции, фигурирующие в полученных уравнениях, суть функции четырех переменных. В классической теории, помимо времени, обычно рассматриваются два типа независимых переменных: переменные Эйлера $(x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ и переменные Лагранжа (X^1, X^2, X^3), которые закрепляются за каждой точкой тела $\mathcal{B}$ в некоторый фиксированный момент времени t_0:

$$\left(X^1, X^2, X^3\right) = \left(x^1\left(t_0\right), x^2\left(t_0\right), x^3\left(t_0\right)\right).$$

Четвертая координата $x^0 = X^0 = \tau$ определяется так, что $dx^0 = dX^0 = d\tau = icdt$, $i = \sqrt{-1}$, а c — скорость сигнала, переносящего информацию об изучаемом объекте (например, скорость света), которую в данном контексте можно считать постоянной. В новой трактовке все упомянутые функции мыслятся как c-тензоры, ранг которых соответствует количеству аргументов. Аргументы же, т.е. эйлеровы и лагранжевы переменные, интерпретируются как индексы, нумерующие компоненты тензоров, определенные в декартовых базисах:

$$\{\bar{e}_{x^0} \otimes \bar{e}_{x^1} \otimes \bar{e}_{x^2} \otimes \bar{e}_{x^3}\}_{x^0 \in i\mathbb{R}^1, x^1, x^2, x^3 \in \mathbb{R}^1} \text{ – в случае эйлеровых переменных,}$$

$$\{\bar{e}_{X^0} \otimes \bar{e}_{X^1} \otimes \bar{e}_{X^2} \otimes \bar{e}_{X^3}\}_{X^0 \in i\mathbb{R}^1, X^1, X^2, X^3 \in \mathbb{R}^1} \text{ – в случае лагранжевых переменных.}$$

Здесь через $i\mathbb{R}^1$ обозначено пространство мнимых чисел. Поскольку базисные векторы $\bar{e}_{x^0}$ и $\bar{e}_{X^0}$ оба связаны с временем и могут быть выбраны одинаковыми, введем для них общее обозначение $\bar{e}_\tau$. Оба базиса содержат одинаковые наборы элементов, различающиеся лишь упорядоченностью. Будем называть их *пространственно-временными* базисами. Масса тела $m^\tau \equiv m(\mathcal{B}_t)$, соответствующая различным моментам времени, определяется выражением (14) и является значениями компонент c-вектора $\bar{m} = \int_\tau m^\tau \bar{e}_\tau$ из набора $\{m^\tau\}_{\tau \in i\mathbb{R}^1}$. По этой причине она, вообще говоря, зависит от выбранного базиса и оказывается, тем самым, величиной неинвариантной по отношению к замене этого базиса. Инвариантной же величиной будет, очевидно, длина c-вектора $\bar{m}$, т.е. c-тензор 0-го ранга или c-скаляр.

Мировые трубки, ассоциированные с какими-либо физическими объектами, обычно в теории наделяются бесконечной протяженностью во времени. Если принять такую точку зрения, то длина c-вектора $\bar{m}$ всегда будет бесконечной, независимо от того, с каким физическим телом она связана. Чтобы избежать этого нежелательного явления, откажемся от рассмотрения мировых трубок бесконечной длины. Примем более реалистическое предположение о том, что тела не существуют вечно и, следовательно, их мировые трубки имеют ограниченную протяженность во времени.[2] В этом случае, для любого физического тела $\mathcal{B}$ имеет место неравенство $M = \|\bar{m}(\mathcal{B}_t)\| < \infty$. Аналогичные рассуждения справедливы и относительно энергии тела, поскольку масса — это лишь одна из интерпретаций меры.

Теперь возможна следующая схема рассуждений:

1. Рассматриваем скаляр $M < \infty$, который мыслим как c-скаляр и представляем в виде свертки (скалярного произведения) двух c-тензоров *Volume* и *Density* одинакового ранга

$$M = Volume\left(Density\right).$$

Их ранг соответствует выбираемой размерности физического пространства n. При этом, c-тензор *Density* типа $\binom{n}{0}$ интерпретируется как плотность, а c-тензор *Volume* типа $\binom{0}{n}$ — как n-форма объема. Впредь, будем полагать $n = 4$.

[2] Такое предположение вовсе не означает необходимость исчезновения/порождения точек тела и конечной протяженности их мировых линий. Напротив, мировые линии по-прежнему могут быть бесконечно протяженны (т.е. точки тела могут считаться существующими вечно). Однако, используя некие внешние соображения, мы выбираем два сечения мировой трубки, которые называем её началом и концом соответственно. К числу таких внешних соображений можно отнести, например, изменение связности сечения мировой трубки или уменьшение плотности ниже некоторого порогового уровня и т.п.

2. В некотором базисе, который будем считать *декартовым* и называть *пространственно-временным*, скаляр M является мерой мировой трубки некоторого тела $\mathcal{B}$ и интерпретируется как масса тела за время его существования. Мировая трубка мыслится как конгруэнция кривых — мировых линий точек тела. Мировые линии параметризуются вещественным параметром t — временем. При этом, метрику g на мировой трубке удобно выбрать такой, которая оставляет длину вектора скорости перемещения вдоль мировой линии постоянной (например, равной единице). В этом случае утверждения, сделанные относительно массы, автоматически выполняются и для энергии.
3. Масса m^{τ} тела $\mathcal{B}$ в момент времени $t = \tau/ic$ есть мера сечения его мировой трубки — множества точек мировой трубки, одновременных с временем t наблюдателя, проводящего это сечение. Масса тела, таким образом, оказывается функцией времени, или, в предлагаемой здесь интерпретации, компонентой бесконечномерного вектора $\overline{m}$. Длина этого c-вектора равна M

$$M = \int_{\tau} m^{\tau}\Omega_{\tau},$$

где Ω_{τ} — 1-форма объема в декартовом базисе.

4. Условимся считать, что первый индекс соответствует координате, связанной с временем. Пусть в базисе $\{\overline{e}_{\tau} \otimes \overline{e}_{x^1} \otimes \overline{e}_{x^2} \otimes \overline{e}_{x^3}\}_{\tau\in i\mathbb{R}^1,\, x^1,\, x^2,\, x^3\in\mathbb{R}^1}$ отличные от нуля компоненты c-тензора *Density* помечают собой многообразие, которое интерпретируется как мировая трубка некоторого тела $\mathcal{B}$. Лагранжев базис $\{\overline{e}_{\tau} \otimes \overline{e}_{X^1} \otimes \overline{e}_{X^2} \otimes \overline{e}_{X^3}\}_{\tau\in i\mathbb{R}^1,\, X^1,\, X^2,\, X^3\in\mathbb{R}^1}$ получим путем перенумерации базисных векторов $\overline{e}_{x^1}, \overline{e}_{x^2}, \overline{e}_{x^3}$, которая зависит от времени так, что выпрямляет мировые линии, а следовательно, и мировую трубку тела, и делает их параллельными мировой линии наблюдателя $(\tau, 0, 0, 0)$. Это осуществляется действием некоторых тензоров P1, P2, P3 на базисные векторы

$$\overline{e}_{X^1} = \int_{x^1} P1^{x^1}_{X^1}\overline{e}_{x^1}, \quad \ldots, \quad \overline{e}_{X^3} = \int_{x^3} P3^{x^3}_{X^3}\overline{e}_{x^3}.$$

5. Преобразование Фурье, в рамках предлагаемого подхода, есть замена базиса (см. предыдущую часть данной работы). Если совокупность c-векторов $\{\overline{e}_x\}$является декартовым базисом c-тензоров ранга 1, то прямое произведение $\{\overline{e}_{x^0} \otimes \ldots \otimes \overline{e}_{x^n}\}$ может рассматриваться как базис пространства c-тензоров ранга $(n + 1)$. Преобразование Фурье осуществляет замену декартова базиса на другой $\{\overline{\varepsilon}_k\}$, который для краткости назовем *базисом Фурье*. Индексы k носят название *волновых чисел*. В случае тензоров ранга выше первого, в качестве базиса может браться как исходный декартов базис, так и базис Фурье, состоящий из элементов прямого произведения $\{\overline{\varepsilon}_{k^0} \otimes \ldots \otimes \overline{\varepsilon}_{k^n}\}$. Кроме указанных базисов, может представлять интерес также базис, состоящий из элементов прямого произведения смешанного типа, например, такого $\{\overline{e}_{x^0} \otimes \ldots \otimes \overline{e}_{x^m} \otimes \overline{\varepsilon}_{k^{m+1}} \otimes \ldots \otimes \overline{\varepsilon}_{k^n}\}$.

Таким образом, можно рассматривать следующие преобразования (далее используются обозначения $\overline{e}_{x^0} = \overline{e}_{\tau}$ и $\overline{\varepsilon}_{k^0} = \overline{\varepsilon}_{\varpi}$:

a) общее *пространственно временное преобразование Фурье* вида

$$\{\bar{e}_\tau \otimes \bar{e}_{x^1} \otimes \ldots \otimes \bar{e}_{x^n}\}_{\tau \in i\mathbb{R}^1, x^1, \ldots, x^n \in \mathbb{R}^1} \to \{\bar{\varepsilon}_\varpi \otimes \bar{\varepsilon}_{k^1} \otimes \ldots \otimes \bar{\varepsilon}_{k^n}\}_{\varpi \in \mathbb{R}^1, k^1, k^2, \ldots, k^n \in i\mathbb{R}^1}.$$

b) *временно́е* или *частотное преобразование Фурье*, при котором осуществляется замена базиса вида

$$\{\bar{e}_\tau \otimes \bar{e}_{x^1} \otimes \ldots \otimes \bar{e}_{x^n}\}_{\tau \in i\mathbb{R}^1, x^1, \ldots, x^n \in \mathbb{R}^1} \to \{\bar{\varepsilon}_\varpi \otimes \bar{e}_{x^1} \otimes \ldots \otimes \bar{e}_{x^n}\}_{\varpi, x^1, \ldots, x^n \in \mathbb{R}^1}.$$

в этом случае в прямом произведении базисных векторов заменяется лишь первый сомножитель связанный с временем.

c) *пространственное преобразование Фурье*, в случае которого рассматривается замена базиса вида

$$\{\bar{e}_\tau \otimes \bar{e}_{x^1} \otimes \ldots \otimes \bar{e}_{x^n}\}_{\tau \in i\mathbb{R}^1, x^1, \ldots, x^n \in \mathbb{R}^1} \to \{\bar{e}_\tau \otimes \bar{\varepsilon}_{k^1} \otimes \ldots \otimes \bar{\varepsilon}_{k^n}\}_{\tau, k^1, k^2, \ldots, k^n \in i\mathbb{R}^1}.$$

Здесь, напротив, в прямом произведении базисных векторов заменяются все сомножители, кроме первого.

NB! Для того чтобы понять, как связаны пространства τ–x и τ–k, будем интерпретировать величину $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ в показателе экспоненты преобразования Фурье (здесь $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3)$ и $\mathbf{k} = (k^1, k^2, k^3)$) как скаляр, связанный с радиусом-вектором $\mathbf{r}$. В этом случае величину $\mathbf{k}$ следует, как уже говорилось, считать 1-формой $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$, а в показателе экспоненты писать свертку $\mathbf{k}(\mathbf{r}) = k_i x^i$, $i = 1, 2, 3$. Если же рассматривается 4-мерное преобразование Фурье, то $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ и $k = (k_0, k_1, k_2, k_3)$, а $dx^0 = icdt$ и $dk_0 = -d\omega/ic$. Здесь $k(x) = k_\alpha x^\alpha = -\omega t + k_i x^i$, $\alpha = 0, \ldots, 3$.

6. В базисе Фурье общего вида, скаляр M также является мерой 4-мерного многообразия, связанного с телом $\mathcal{B}$ — Фурье-образом мировой трубки тела. Фурье-образ мировой трубки также можно мыслить как конгруэнцию кривых и параметризовать вещественным параметром ω — *частотой*.
7. Если обозначить через μ^ϖ, где $\varpi \equiv i\omega/c$, меру сечения Фурье-образа мировой трубки гиперплоскостью равных частот, а через Θ_ϖ соответствующую 1-форму объема, то длина c-вектора $\bar{\mu}$ будет также равна M

$$M = \int_\varpi \mu^\varpi \Theta_\varpi.$$

8. Далее будем рассматривать пространственное преобразование Фурье. Это частный случай преобразования Фурье, не затрагивающий первого тензорного индекса, т.е. координаты $x^0 = \tau$, связанной с временем. Оно позволяет изучать временную эволюцию объектов, заданных в пространстве волновых чисел.
9. Если в декартовом базисе задана конгруэнция мировых линий — мировая трубка тела, то после преобразования Фурье она превращается в некое новое многообразие. На этом Фурье-образе мировой трубки можно определить новую конгруэнцию кривых $d_t k^j = v^j$, $j = 1, 2, 3$ (мировых линий в пространстве τ–k), где $\vec{v}$ — вектор, касательный к Фурье-образу мировой трубки тела.

Описание массы в пространстве τ–x

Будем использовать в пространстве τ–x эйлеровы $(\tau, x = (x^1, x^2, x^3))$ и лагранжевы $(\tau, X = (X^1, X^2, X^3))$ координаты и соответствующие им базисы[3]: эйлеров $\{\bar{e}_\tau \otimes e_x^E\}$ и лагранжев $\{\bar{e}_\tau \otimes e_X^L\}$. Преобразование базисов осуществляется c-тензорами 6-го ранга P и $\Pi = P^{-1}$ типа $\binom{3}{3}$, которые производят соответствующую перенумерацию базисных векторов ξ: $(t, X) \mapsto x(t)$ и ξ^{-1}: $x(t) \mapsto (t, X)$, т.е.

$$\Pi_X^x = \delta^x_{\xi(t,X)} = \delta_X^{\xi^{-1}(x)}, \quad P_x^X = \delta^X_{\xi^{-1}(x)} = \delta_x^{\xi(t,X)}. \tag{19}$$

Геометрически отображение ξ задает траекторию $\xi(t, X) = x(t)$ движения точки X. Оба базиса связаны, таким образом, соотношениями

$$e_X^L = \int_x \Pi_X^x e_x^E = \int_x \delta^x_{\xi(t,X)} e_x^E = e^E_{\xi(t,X)},$$
$$e_x^E = \int_X P_x^X e_X^L = \int_X \delta^X_{\xi^{-1}(x)} e_X^L = e^L_{\xi^{-1}(x)}. \tag{20}$$

В этом случае c-тензор 4-го ранга ρ может быть записан с использованием обоих указанных базисов в следующем виде

$$\rho = \int_\tau \int_x \rho_E^{\tau x} \bar{e}_\tau \otimes e_x^E = \int_\tau \int_X \rho_L^{\tau X} \bar{e}_\tau \otimes e_X^L,$$

а компоненты его в этих базисах связаны соотношениями

$$\int_x \rho_E^{\tau x} e_x^E = \int_x \rho_E^{\tau x} \int_X P_x^X e_X^L = \int_X \left(\int_x P_x^X \rho_E^{\tau x} \right) e_X^L = \int_X \rho_L^{\tau X} e_X^L \Leftrightarrow \rho_L = P \rho_E. \tag{21}$$

Пусть, далее, $\tilde{\sigma}_E^r$ базисная 1-форма, дуальная базисному c-вектору $\bar{e}_s^E$, т.е. $\tilde{\sigma}_E^r(\bar{e}_s^E) = \delta_s^r$, и ее лагранжев вариант $\tilde{\sigma}_L^R$, дуальный лагранжеву базисному c-вектору $\bar{e}_S^L$, т.е. $\tilde{\sigma}_L^R(\bar{e}_S^L) = \delta_S^R$. С помощью введенных базисных 1-форм можно образовать базисные 3-формы $\sigma_E^x = \sigma_E^{x^1} \wedge \sigma_E^{x^2} \wedge \sigma_E^{x^3}$ и $\sigma_L^X = \sigma_L^{X^1} \wedge \sigma_L^{X^2} \wedge \sigma_L^{X^3}$, связанные соотношением

$$\sigma_L^X = \int_x \sigma_E^x P_x^X$$

и записать 3-форму объема Ω_3 в виде

$$\Omega_3 = \int_X \sigma_L^X \Omega_X^L = \int_X \Omega_X^L \int_x \sigma_E^x P_x^X = \int_x \sigma_E^x \Omega_x^E.$$

Отсюда получим связь компонент Ω_3 в обоих базисах

$$\Omega_x^E = \int_X P_x^X \Omega_X^L \Leftrightarrow \Omega^E = P\Omega^L. \tag{22}$$

---

[3] Здесь и далее мы будем использовать сокращение записи типа $e_x = \bar{e}_{x^1} \otimes \bar{e}_{x^2} \otimes \bar{e}_{x^3}$. Кроме того, величины, относящиеся к эйлерову и лагранжеву описанию, будем, как и раньше, помечать верхними или нижними индексами E и L соответственно.

Теперь c-вектор массы $\bar{m}$ можно представить в виде свертки двух c-тензоров $\bar{m} = \rho(\Omega_3)$. Компоненты c-вектора массы m^τ запишутся следующим образом в эйлеровых координатах:

$$m^\tau = \left(\rho\left(\Omega_3\right)\right)^\tau = \int_x \rho_E^{\tau x} e_x^E \left(\int_y \sigma_E^y \Omega_y^E\right) = \int_x \rho_E^{\tau x} \int_y \overbrace{e_x^E\left(\sigma_E^y\right)}^{\delta_x^y} \Omega_y^E =$$

$$= \int_x \rho_E^{\tau x} \Omega_x^E = \int_x \rho_E\left(\tau, x\right)\Omega^E\left(x\right)dx = \left(\rho_E\left(\Omega^E\right)\right)^\tau$$

и, аналогично, в лагранжевых координатах:

$$m^\tau = \left(\rho\left(\Omega_3\right)\right)^\tau = \int_X \rho_L^{\tau X} e_X^L \left(\int_Y \Omega_Y^L \sigma_L^Y\right) = \int_X \rho_L^{\tau X} \int_Y \overbrace{e_X^L\left(\sigma_L^Y\right)}^{\delta_X^Y} \Omega_Y^L =$$

$$= \int_X \rho_L^{\tau X} \Omega_X^L = \int_X \rho_L\left(\tau, X\right)\Omega^L\left(X\right)dX = \left(\rho_L\left(\Omega^L\right)\right)^\tau.$$

Здесь в случае эйлеровых координат интеграл $\int_x$ берется по зависящей от времени конфигурации тела $\mathcal{B}_t$, а в случае лагранжевых координат интеграл $\int_X$ — вычисляется по некоторой фиксированной отсчетной конфигурации $\mathcal{B}_0$. Иными словами, в случае $\int_x$, значения индексов x, при которых $\rho_E^{\tau x} \neq 0$, зависят от времени, а во втором случае $\int_X$, значения X, при которых $\rho_L^{\tau X} \neq 0$, постоянны.

Переход от лагранжева представления массы к эйлерову осуществляется согласно следующей цепочке равенств

$$m^\tau = \int_X \rho_L^{\tau X} \Omega_X^L \overset{(21)}{=} \int_X \left(\int_x P_x^X \rho_E^{\tau x}\right)\Omega_X^L = \int_x \rho_E^{\tau x}\left(\int_X P_x^X \Omega_X^L\right) \overset{(22)}{=} \int_x \rho_E^{\tau x} \Omega_x^E$$

или

$$\bar{m} = \rho_L\left(\Omega^L\right) = P\rho_E\left(\Omega^L\right) = \rho_E\left(P\Omega^L\right) \overset{(22)}{=} \rho_E\left(\Omega^E\right).$$

Тензор P, таким образом, должен быть симметричным. Теперь учитывая (19), запишем

$$\rho_L^{\tau X} = \int_x P_x^X \rho_E^{\tau x} = \int_x \delta_x^{\xi(t,X)} \rho_E^{\tau x} = \rho_E^{\tau \xi(t,X)} \tag{23}$$

и

$$\Omega_X^L = \int_x \Pi_X^x \Omega_x^E = \int_x \delta_{\xi(t,X)}^x \Omega_x^E = \Omega_{\xi(t,X)}^E \tag{24}$$

и найдем

$$m^\tau = \int_X \rho_L^{\tau X} \Omega_X^L = \int_x \rho_E^{\tau x} \Omega_x^E = \int_X \rho_E^{\tau \xi(t,X)} \Omega_{\xi(t,X)}^E. \tag{25}$$

Поскольку $\Omega_x^E = \Omega^E(x)dx$ и $\Omega_X^L = \Omega^L(X)dX$, имеем

$$\Omega_{\xi(t,X)}^E = \Omega^E\left(\xi\left(t,X\right)\right)d\xi\left(t,X\right) = J\left(t,X\right)\Omega^E\left(\xi\left(t,X\right)\right)dX \overset{(22)}{=} \Omega^L\left(X\right)dX = \Omega_X^L \tag{26}$$

или

$$\Omega^L\left(X\right)=J\Omega^E\left(x\right). \tag{27}$$

где $J(t, X) = \det(\partial_X \xi(t, X))$ — якобиан преобразования координат. Окончательно, получим

$$m^\tau=\int_X \rho_E\left(\tau,\xi\left(t,X\right)\right)J\Omega^E\left(\xi\left(t,X\right)\right)dX=\int_X \rho_E^{\tau\xi\left(t,X\right)}\Omega_X^L. \tag{28}$$

Выражение (28) часто удобно использовать в тех случаях, где существенна независимость от времени области интегрирования, т.е. диапазон индексов, для которого компоненты c-тензора ρ ненулевые. Кривая $\xi(t, X)$ — траектория (мировая линия) в пространстве τ–x.

Литература

1. *Белевич М.Ю.* О «спектральной» форме уравнений гидромеханики. I. Описание проблемы и пример подхода. // Учёные записки РГГМУ, 2014, № 37, с. 44–53.
2. *Белевич М.Ю.* О «спектральной» форме уравнений гидромеханики. II. Функции, как бесконечномерные тензоры. // Учёные записки РГГМУ, 2015, № 38, с. 59–65.
3. *Belevich M.* Causal description of non-relativistic dissipative fluid motion. // Acta Mechanica, 2003, vol. 161, pp. 65–80.
4. *Hutson V.C.L., Pym J.S.* Applications of Functional Analysis and Operator Theory. — Academic Press, 1980. (перевод: *Хатсон В., Пим Дж.* Приложения функционального анализа и теории операторов. — М.: Мир, 1983. — 432 с.).
5. *Richtmyer R.D.* Principles of Advanced Mathematical Physics. Vol. 1. — Springer-Verlag, N.Y., 1978. (перевод: *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. Т. 1. — М.: Мир, 1982. — 488 с.).
6. *Schutz B.F.* Geometrical Methods of Mathematical Physics. — Cambridge: Cambridge University Press, 1980. — 250 p. (перевод: *Шутц Б.* Геометрические методы математической физики. — М.: Мир, 1984. — 304 с.).