

Е.В. Гайдукова

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ФРАКТАЛЬНОЙ ДИАГНОСТИКИ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ РЯДОВ

E. V. Gaidukova

COMPARATIVE ANALYSIS OF METHODS OF FRACTAL DIAGNOSIS OF HYDROLOGICAL SERIES

Рассматриваются наиболее распространенные методы расчета фрактальных размерностей временных рядов, основанные на корреляционном интеграле, R/S-анализе и на оценке амплитудной вариации. Построены карты распределения фрактальных размерностей по территории России. Проанализированы условия применимости рассматриваемых методов.

Ключевые слова: фрактальная размерность, корреляционный интеграл, показатель Херста, амплитудная вариация.

The most common methods for calculating the fractal dimension of time series are considered based on the correlation integral, R/S-analysis and evaluation of the amplitude variation. Maps of the distribution of fractal dimension over the territory of Russia were built. The conditions of applicability of these methods were estimated.

Key words: fractal dimension, correlation integral, exponent of Hurst, amplitude variation.

Введение

Установлено, что при моделировании (прогнозировании) стока на некоторых речных бассейнах невозможно получить надежные статистические характеристики, то есть модель, описывающая процесс формирования стока, не дает устойчивых решений [5]. Для преодоления этой неустойчивости необходимо учитывать дополнительные фазовые переменные в модели, например, помимо стока еще испарение и/или изменение суммарных влагозапасов в почвогрунтах [5]. Число фазовых переменных позволяет получить, так называемая, фрактальная диагностика рядов стока [6]. Ряды диагностируются методом, основанным на расчете корреляционного интеграла и соответствующей фрактальной размерности (округляя которую до ближайшего большего целого, определяется число фазовых переменных, необходимых для моделирования системы). Цель данной статьи заключается в рассмотрении альтернативных методов фрактальной диагностики и сравнении результатов их применения к рядам стока на территории Российской Федерации.

Формирование базы данных гидрологических характеристик

База данных по ежегодным расходам воды была сформирована по изданиям «Многолетние данные о режиме и ресурсах поверхностных вод суши» и «Осредненные гидрологические характеристики». Выбирались посты, замыкающие зональные площади водосборов (в основном в диапазоне от 1 500 до 50 000 км²) с продолжительностью периодов наблюдений, позволяющей при необходимости применить метод гидрологической аналогии для восстановления и удлинения рядов (период наблюдений для всех станций составляет не менее 20 лет, в среднем до 1990 г.). На рис. 1 показано распределение станций наблюдения за расходом воды, вошедших в базу данных — всего 290 станций. Видно, что гидрологические станции в основном расположены в Европейской части РФ и на юге Азии, так же часть постов находится на территории Украины.

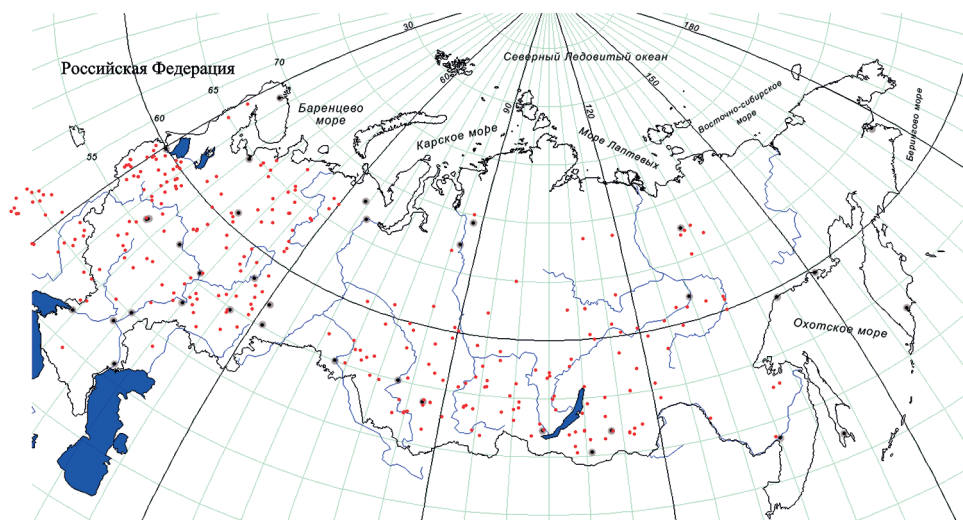


Рис. 1. Местоположение станций наблюдений за стоком

Методы определения фрактальной размерности

Рассматриваются наиболее распространенные методы расчета фрактальных размерностей, основанные на корреляционном интеграле, R/S -анализе и на оценке амплитудной вариации. Данные методы позволяют диагностировать именно временные ряды и отличаются алгоритмическими подходами к их оценке.

Метод, основанный на корреляционном интеграле

В данном методе последовательность измерений, взятая с временной сдвижкой τ [$Q(t)$, $Q(t + \tau)$, $Q(t + 2\tau)$, ...], рассматривается в качестве компонент вектора, описывающего систему. По рядам со сдвигами строятся псевдоаттракторы [$Q(t) = f[Q(t + \tau)]$ и т.д.], для каждого из которых определяется корреляционный интеграл $C(r)$ (или

корреляционная сумма — отношение числа точек, расстояния между которыми меньше заданного расстояния r , к общему числу точек), входящий в выражение для вычисления фрактальной (корреляционной) размерности [6]:

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} (\ln C(r) / \ln r). \quad (1)$$

Результатом вычисления является неизменяющееся значение размерности при последовательных сдвигах.

Метод, основанный на R/S-анализе

Метод анализа временных рядов, основанный на вычислении величины нормированного размаха R/S , был предложен Х.Э. Херстом [12] и Б. Мандельбротом [8] и по существу представляет собой размах $R(\Delta t)$ данных на временном интервале Δt , деленный на стандартное отклонение выборки $S(\Delta t)$. Величина R/S входит в выражение для расчета показателя H (показателя Херста) [11]:

$$H = \ln(R/S) / \ln(\Delta t). \quad (2)$$

Самоаффинные последовательности измерений (к которым можно отнести и ряды стока [2]) представляют собой кривые фрактальной размерности [10]:

$$D_H = 2 - H. \quad (3)$$

Показатель Херста может принимать значения в интервале $[0, 1]$ и служит мерой оценки хаотичности ряда [1, 7]. Значения показателя H , близкие к 0,5, соответствуют стохастическим рядам. Если $H \in (0,5; 1]$, то рассматриваемый временной ряд является персистентным и характеризуется эффектом долговременной памяти (к таким эффектам относятся наличие в рассматриваемом временном ряде трендоустойчивых отрезков, фрактальность ряда, наличие периодических циклов). Значение $H \in [0; 0,50)$ означает антиперсистентность рассматриваемого временного ряда (присутствует эффект возвращения к среднему, чередование положительных и отрицательных приращений).

Метод, основанный на оценке амплитудной вариации

Считается, что наиболее простым способом определения фрактальной размерности является вычисление ее через клеточную размерность D_c [4]:

$$\sum_{i=1}^m A_i(\delta) \sim \delta^{-(D_c-1)} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0 \quad (4)$$

где $A_i(\delta)$ — амплитуда значений внутри прямоугольников (клеток) с основанием δ , которыми покрывается плоскость графика временного ряда; m — число прямоугольников.

Значение D_c определяется по углу наклона прямой, аппроксимирующей в логарифмическом масштабе график зависимости суммы амплитуд от изменяющегося размера клетки.

Сравнительный анализ результатов методов

На рис. 2, показывающем распределение корреляционной размерности, видно, что преобладают размерности в диапазоне от 1 до 2. В Европейской части бассейны с такой размерностью покрывают практически всю территорию, на Азиатской территории по сравнению с Европейской больше бассейнов с размерностью меньше единицы. Ряды стока с размерностью больше двух малочисленны и характерны для крупных водосборов, таких рек как Днепр, Волга, Лена.

С практической точки зрения, карта на рис. 2 означает, что для надежного описания режима формирования речного годового стока на большинстве водосборов РФ необходима информация о двух фазовых переменных. Это может быть расход воды и испарение или изменение суммарных влагозапасов речного бассейна [4, 5].

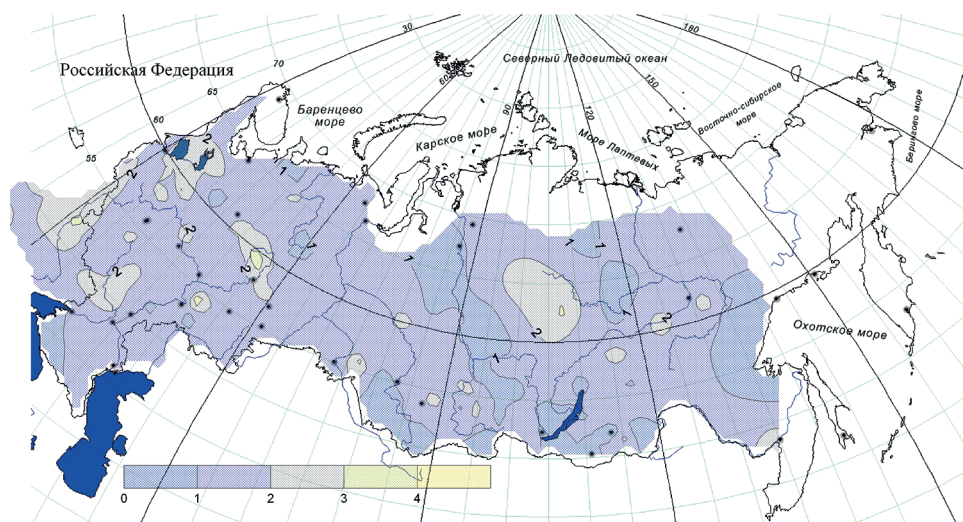


Рис. 2. Распределение корреляционной размерности

Фрактальные размерности, полученные по методу, в основе которого положен R/S -анализ, находятся в диапазоне от 1,30 до 1,72. Причем наиболее распространенная по территории градация размерностей — 1,45–1,52. В Азиатской части наблюдается некоторая визуальная корреляция в распространении фрактальных размерностей с картой на рис. 2.

В алгоритме метода заложено, что фрактальные размерности должны варьироваться от единицы до двух, что несколько противоречит самому смыслу понятия фрактальной размерности и гидрологической практики, так как получается, что не существует бассейнов, на которых при моделировании (прогнозировании) достаточно только одной фазовой переменной — расхода воды.

Фрактальные размерности, полученные по методу, основанному на амплитудной вариации, не превышают единицы (рис. 4). Получается, что для успешного

прогнозирования достаточно только одной переменной — расхода воды. Но это противоречит результатам оценки устойчивости процесса формирования стока. Найдено большое число бассейнов, в которых процесс формирования стока описывается неустойчиво, а значит, необходимо привлекать дополнительные переменные.

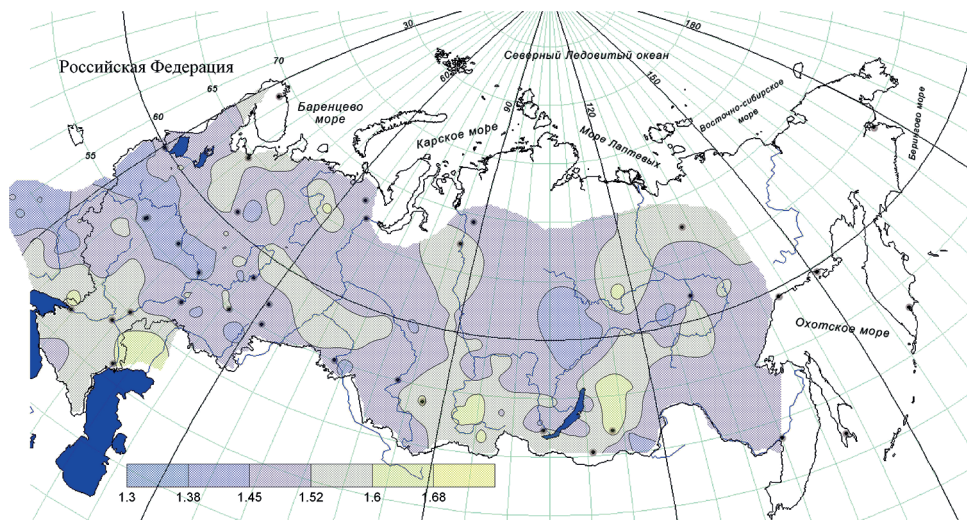


Рис. 3. Распределение фрактальной размерности, определенной с помощью R/S -анализа

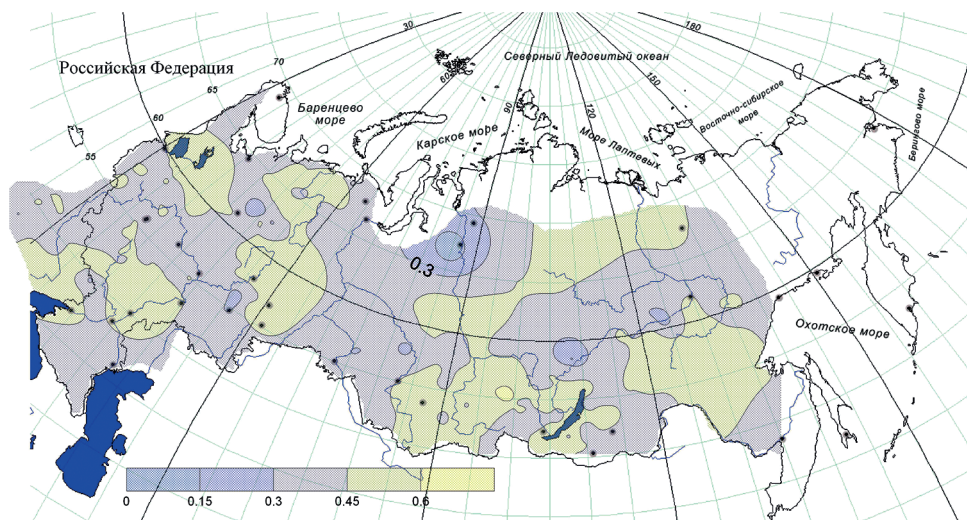


Рис. 4. Распределение фрактальной размерности, рассчитанной по методу, основанному на амплитудной вариации

Выводы

В результате рассмотрения методов фрактальной диагностики к рядам стока получены следующие выводы.

- 1) Метод, основанный на оценке амплитудной вариации, прост в реализации, но занижает значения фрактальных размерностей и скорее годится для оценки геометрических фракталов [9].
- 2) Метод, основанный на R/S -анализе, также не трудоемок, но исключает возможность получения в качестве результата фрактальную размерность меньше единицы и больше двух. Данный метод полезен получаемым при расчете показателем Херста, оценивающим хаотичность ряда.
- 3) Метод, основанный на корреляционном интеграле, является наиболее подходящим методом фрактального диагностирования при составлении математических моделей. Он показывает, сколько переменных участвует в процессе, тем самым предоставляет необходимую информацию для дальнейших прогнозов. У этого метода есть недостатки: он сложнее остальных, более трудоемок, а также требует продуманного подбора расчетных параметров.

Литература

1. *Беляков С.С.* Использование агрегирования в методах нелинейной динамики для анализа и прогнозирования временных рядов котировки акций: Автореф. дис. ... канд. эконом. наук. — Ставрополь: СГУ, 2005. — 158 с.
2. *Гайдукова Е.В.* Фрактальное самоподобие временных гидрологических рядов // Наука сегодня: теоретические и практические аспекты. Сб. науч. тр. по материалам международной научно-практической конференции. Научный центр «Диспут». — Вологда: изд-во «Маркер», 2015, с. 63–66.
3. *Гайдукова Е.В.* Диагностирование чувствительности фрактальной размерности многолетнего речного стока к возможным климатическим изменениям // Учёные записки РГГМУ, 2013, № 30, с. 21–27.
4. *Дубовиков М.М., Старченко М.М.* О фрактальном анализе хаотических временных рядов // Матем. методы в синергетике. — М.: АНО «Центр междисциплинарных исследований», 2013. — 14 с.
5. *Коваленко В.В.* Частично инфинитная гидрология. — СПб.: РГГМУ, 2007. — 230 с.
6. *Коваленко В.В., Викторова Н.В., Гайдукова Е.В.* Моделирование гидрологических процессов. — СПб.: РГГМУ, 2006. — 559 с.
7. *Лоскутов А.Ю.* Анализ временных рядов. — М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2008. — 113 с.
8. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы (The Fractal Geometry of Nature). — М.: Ин-т компьютер. исслед., 2002. — 656 с.
9. *Павлов А.Н., Саноцкая Н.А.* Поиски математического определения реки // Учёные записки РГГМУ, 2012, № 23, с. 21–34.
10. *Федер Е.* Фракталы / Пер. с англ. — М.: Мир, 1991. — 254 с.
11. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. — 528 с.
12. *Hurst H.E., Black R.P., Simaika Y.M.* Long-Term Storage: An Experimental Study (Constable, London), 1965. — 145 p.