

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ГЕНЕРАЦИИ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ОТ ЛОКАЛИЗОВАННОГО ПО ВЫСОТЕ ТРОПОСФЕРНОГО ИСТОЧНИКА

Н.О. Шевчук¹, А.И. Погорельцев^{1,2}, Н.М. Гаврилов¹

¹ Санкт-Петербургский государственный университет

² Российский государственный гидрометеорологический университет, e-mail:
n.o.shevchuk@mail.ru

Рассматривается вопрос о математическом описании источника внутренних гравитационных волн (ВГВ) и эффективности генерации ВГВ в зависимости от параметров волны и характеристик источника. Исследовано влияние высоты модельного тропосферного источника на эффективность генерации гравитационных волн. Приведен необходимый набор математических выкладок. Эффективность генерации ВГВ в зависимости от параметров волны и характеристик источника проиллюстрирована с помощью расчетов амплитуды возмущения вертикальной скорости.

Ключевые слова: внутренние гравитационные волны, источник гравитационных волн, функция Грина.

INTERNAL GRAVITY WAVE GENERATION EFFECTIVENESS FROM HEIGHT-LOCALIZED TROPOSPHERIC SOURCE

N.O. Shevchuk¹, A.I. Pogoreltsev^{1,2}, N.M. Gavrilov¹

¹ St. Petersburg State University

² Russian State Hydrometeorological University

To determine an internal gravity wave (IGW) source the mathematical approach based on Green function analysis is considered. Dependences of IGW generation efficiency upon wave parameters and tropospheric source height are reviewed. These dependences are demonstrated with amplitudes of the perturbation vertical velocity calculations

Keywords: internal gravity waves, gravity wave source, Green function.

Введение

Атмосферные внутренние гравитационные волны (ВГВ) являются одним из основных механизмов передачи энергии из тропосферы в более высокие слои атмосферы. Теоретическую основу при изучении и моделировании гравитационных волн составляют базовые уравнения гидротермодинамики [9], примененные к воздушной среде. Исследование системы уравнений гидротермодинамики атмосферы и их линеаризация позволяют получить систему уравнений для амплитуды волновых возмущений [4, 7].

Наблюдения за проявлениями волн в серебристых облаках мезосферы (на высоте около 80 км) и последующий поиск расположения источника волн позволяют сделать вывод, что ВГВ от тропосферных источников могут проявляться на значительном вертикальном удалении от источника волны [12, 13].

Целью данной работы является изучение эффективности генерации внутренней гравитационной волны в зависимости от частоты и горизонтальной длины волны с помощью построения функций Грина для задачи расчета амплитуд волновых возмущений. Существует, как будет показано далее, область частот и длин волн, при которых эффективность генерации ВГВ и их амплитуды достигают своих наибольших значений. При изучении эффективности генерации ВГВ также учитывается тот факт, что в соответствии с результатами наблюдений [14—16] в реальной атмосфере преобладают ВГВ со следующими параметрами: период от 10 минут до 4 часов, горизонтальная длина волн λ_x от 50 до 600 км, фазовая скорость в пределах от 5 до 50 м/с.

Уравнение вертикальной структуры ВГВ

Решать задачу об определении структуры гравитационных волн (зависимость амплитуды возмущений от высоты и входных параметров волны) можно как численно, так и аналитически. Для поиска аналитического решения используем функцию Грина для амплитуды вертикальной скорости ветра.

Приведение системы гидродинамических уравнений для волновых возмущений к виду, пригодному для построения функций Грина, содержится в монографии [5]. В ней для спектральных составляющих волнового возмущения, зависящих от горизонтальной координаты и времени в форме плоской установившейся гармонической волны $w'(z) = W(z) \cdot \exp(i(k_x x - \omega t))$, выведено так называемое уравнение вертикальной структуры ВГВ:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + k_z^2(z) \right] \tilde{w}(z) = \varphi(z), \quad (1)$$

где $\varphi(z)$ — зависящая от высоты амплитуда Фурье-преобразования волнового источника по времени и горизонтальным координатам; $\tilde{w}(z) = W(z) \cdot \omega / g \cdot \exp(-z/2H)$ — безразмерная амплитуда вертикальной скорости, причем множитель $\exp(-z/2H)$ компенсирует рост амплитуды волны с высотой за счет уменьшения плотности; g — ускорение свободного падения; ω — частота волны. В выражении (1) $k_z = 2\pi / \lambda_z$ — вертикальное волновое число, связанное с другими параметрами волны дисперсионным соотношением [5], имеющим следующий вид:

$$k_z^2 = (N^2 / \omega^2) k_x^2 - 1 / (4H^2), \quad (2)$$

где $N = \sqrt{(\gamma - 1) / \gamma \cdot g / H}$ — частота Брента — Вайсяля, H — высота однородной атмосферы, $k_x = 2\pi / \lambda_x$ — горизонтальное волновое число, $\gamma = C_p / C_v \approx 1,4$ — отношение теплоемкости воздуха при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме.

Наблюдаемые в атмосфере волновые возмущения и их источники могут быть представлены в виде суперпозиции монохроматических волн с помощью преобразования Фурье. Квазистационарные источники ВГВ могут возникать, например, в струйных течениях и фронтальных зонах, когда время их существования превышает несколько периодов ВГВ. Наблюдения [12 — 16] выявляют ВГВ, связанные с тропосферными метеорологическими явлениями.

Свойства функции Грина

Уравнение (1) можно записать в символьном виде следующим образом:

$$\mathcal{L}[\tilde{w}] = \varphi(z), \quad (3)$$

где \mathcal{L} — дифференциальный оператор второго порядка в левой части (1). В общем виде краевая задача решается для граничных условий при $z = 0$ и $z = z_{\max}$ вида

$$\alpha_1 \tilde{w}(0) + \beta_1 d\tilde{w}(0) / dx = 0, \quad (4)$$

$$\alpha_2 \tilde{w}(z_{\max}) + \beta_2 d\tilde{w}(z_{\max}) / dx = 0, \quad (5)$$

причем константы α_1 и α_2 удовлетворяют соотношениям $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$ и $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$. Функция Грина $G(z, \zeta)$ определяется таким образом, чтобы решение рассматриваемой граничной задачи можно было представить в виде

$$\tilde{w}(z) = - \int_0^{z_{\max}} G(z, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta. \quad (6)$$

Для любого $\zeta \in (0, z_{\max})$ можно рассмотреть отдельные функции для областей ниже и выше ζ :

$$G(z, \zeta) = \begin{cases} G_1(z, \zeta), & z < \zeta, \\ G_2(z, \zeta), & z > \zeta. \end{cases} \quad (7)$$

Функции G_1 и G_2 обладают следующими свойствами [10]:

1) функции G_1 и G_2 удовлетворяют однородным уравнениям

$$\mathcal{L}[G_1] = 0, \quad z < \zeta \quad (8)$$

и

$$\mathcal{L}[G_2] = 0, \quad z > \zeta; \quad (9)$$

2) функция G_1 удовлетворяет граничному условию (4), а функция G_2 — граничному условию (5);

3) функция G непрерывна при $z = \zeta$:

$$G_1(z, \zeta)|_{z=\zeta} = G_2(z, \zeta)|_{z=\zeta}; \quad (10)$$

4) производная функция G по z меняется скачком при $z = \zeta$:

$$dG_2(z, \zeta) / dz \Big|_{z=\zeta} - dG_1(z, \zeta) / dz \Big|_{z=\zeta} = -1. \quad (11)$$

Скачок производной при $z = \zeta$ связан с различным соотношением волн, распространяющихся вверх и вниз в областях выше и ниже ζ , что необходимо для удовлетворения различающихся нижнего и верхнего граничных условий (4) и (5).

Функция Грина для уравнения вертикальной структуры ВГВ

Рассмотрим решение уравнения вертикальной структуры ВГВ (1) с помощью построения функции Грина для распространяющихся по вертикали волн, генерируемых распределенными в атмосфере источниками. На нижней границе атмосферы используем условие твердой стенки

$$\tilde{w}(z) \Big|_{z=0} = 0. \quad (12)$$

Верхнее граничное условие соответствует излучению волн, распространяющихся вверх:

$$\frac{d\tilde{w}(z)}{dz} \Big|_{z \rightarrow \infty} = -ik_z \tilde{w}(z) \Big|_{z \rightarrow \infty}. \quad (13)$$

Построение функции Грина дифференциального оператора уравнения (1) возможно только при $k_z = \text{const}$. В этом случае уравнение (1) при $\varphi(z) = 0$ имеет два фундаментальных решения: $w^+ = \exp(+i|k_z|z)$ и $w^- = \exp(-i|k_z|z)$.

Для получения решения $\tilde{w}(z)$ методом функций Грина введем функцию $u(z)$, которая удовлетворяет уравнению (1) при $\varphi(z) = 0$ и граничному условию (12), и функцию $v(z)$, которая также удовлетворяет этому уравнению и верхнему граничному условию (13). Эти функции могут быть представлены в виде суперпозиции полученных выше фундаментальных решений, т.е. $u(z) = a_1 w^+(z) + a_2 w^-(z)$ и $v(z) = a_3 w^+(z) + a_4 w^-(z)$, где a_i — константы. Из нижнего граничного условия получаем: $u(z=0) = 0$ или $a_2 = -a_1$. Условие (13) дает $a_3 = 0$. Учитывая, что коэффициенты a_1 и a_4 могут быть взяты произвольно (положим их равными единице), получаем две функции: $u(z) = w^+(z) - w^-(z)$ и $v(z) = w^-(z)$, каждая из которых удовлетворяет однородному уравнению и одному из граничных условий.

Первые два из указанных выше свойств функции Грина выполняются, если определить эту функцию в виде

$$G(z, \zeta) = \begin{cases} c_1 u(z) = c_1 [e^{i|k_z|z} - e^{-i|k_z|z}], & z < \zeta, \\ c_2 v(z) = c_2 e^{-i|k_z|z}, & z > \zeta. \end{cases} \quad (14)$$

Третье и четвертое условия могут быть использованы для определения постоянных c_1 и c_2 . Подставив (12) и (13) в (10) и (11), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} c_2 v(\zeta) = c_1 u(\zeta), \\ c_2 v'(\zeta) - c_1 u'(\zeta) = -1, \end{cases} \quad (15)$$

где

$$u'(\zeta) \equiv du(z) / dz \Big|_{z=\zeta} = ik_z \left[e^{ik_z \zeta} + e^{-ik_z \zeta} \right], \quad (16)$$

$$v'(\zeta) \equiv dv(z) / dz \Big|_{z=\zeta} = -ik_z e^{-ik_z \zeta}. \quad (17)$$

Решая систему (15) относительно c_1 и c_2 , получаем выражения для коэффициентов c_1 и c_2 , которые могут быть упрощены [10], если учесть, что функции $u(z)$ и $v(z)$ удовлетворяют однородному уравнению $\mathcal{L}[u] = 0$. Если ввести определитель Вронского $V(z) \equiv v'(z)u(z) - v(z)u'(z)$, для которого (в случае задачи (1)) выполняется условие $V(\xi) = \text{const} \equiv -A^{-1} = -2ik_z$ (см. работу [10]), то, решая систему (15) относительно c_1 и c_2 , получаем:

$$c_1 = \frac{v(\xi)}{\left[v(\xi)u'(\xi) - v'(\xi)u(\xi) \right]} = Av(\xi), \quad (18)$$

$$c_2 = \frac{u(\xi)}{\left[v(\xi)u'(\xi) - v'(\xi)u(\xi) \right]} = Au(\xi). \quad (19)$$

Тогда функция Грина записывается в виде

$$G(z, \xi) = \begin{cases} Av(\xi)u(z), & z < \xi, \\ Au(\xi)v(z), & z > \xi. \end{cases} \quad (20)$$

Используя вышеприведенные выражения для функций $v(\zeta)$ и $u(\zeta)$ и их производных, можно выражение (20) привести к виду

$$G(z, \zeta) = \begin{cases} \frac{1}{k_z} e^{-ik_z \zeta} \sin(k_z z), & z < \zeta, \\ \frac{1}{k_z} \sin(k_z \zeta) e^{-ik_z z}, & z > \zeta. \end{cases} \quad (21)$$

Согласно (6) решение уравнения (1) запишется в виде

$$\tilde{w}(z) = -\frac{e^{-ik_z z}}{k_z} \int_0^z \sin(k_z \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta - \frac{\sin(k_z z)}{k_z} \int_z^{z_{\max}} e^{-ik_z \zeta} \varphi(\zeta) d\zeta. \quad (22)$$

Подстановка решения (22) в уравнение (1) с учетом условий, накладываемых на функцию Грина (см. выше), позволяет показать, что решение (22) действительно является решением поставленной краевой задачи. Для того чтобы это продемонстрировать, получим выражение для первой производной от амплитуды:

$$\frac{d\tilde{w}(z)}{dz} = ie^{-ik_z z} \int_0^z \sin(k_z \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta - \cos(k_z z) \int_z^{z_{max}} e^{-ik_z \zeta} \varphi(\zeta) d\zeta, \quad (23)$$

а также для ее второй производной:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{w}(z)}{dz^2} &= k_z e^{-ik_z z} \int_0^z \sin(k_z \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta + k_z \sin(k_z z) \int_z^{z_{max}} e^{-ik_z \zeta} \varphi(\zeta) d\zeta + \\ &+ [\cos(k_z z) + i \sin(k_z z)] e^{-ik_z z} \varphi(z) = -k_z^2 \tilde{w}(z) + \varphi(z). \end{aligned} \quad (24)$$

Видно, что, если перенести $-k_z^2 \tilde{w}(z)$ в левую часть, выражение (24) сведется к формуле (1).

Решение (22) подчиняется также граничным условиям (12) и (13). Покажем это на примере верхнего граничного условия (условия излучения) в форме (13). Например, с учетом (23) можно получить

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\tilde{w}(z)}{dz} \right|_{z \rightarrow \infty} &= ie^{-ik_z z} \int_0^{z_{max}} \sin(k_z \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta = \\ &= -ik_z \left[\frac{e^{-ik_z z}}{k_z} \int_0^{z_{max}} \sin(k_z \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta \right] = -ik_z \tilde{w}(z) \Big|_{z \rightarrow \infty}. \end{aligned} \quad (25)$$

Волновой компонент вертикальной скорости труднодоступен для скорости прямых измерений. Однако, как показано в [5], при отсутствии диссипации, амплитуды волновых возмущений других гидродинамических переменных можно определить по амплитуде вертикальной скорости с помощью поляризационных соотношений теории ВГВ [2, 5].

Результаты расчета

Амплитуды \tilde{w} были вычислены на основе выражения (23) с помощью квадратурных формул. Зависимость амплитуды \tilde{w} от вертикальной длины волны $\lambda_z = 2\pi / k_z$ и от высоты максимума функции источника $\varphi(z)$ для (23) показана на рис. 1. Для приведенного примера функция локализованного по высоте источника $\varphi(z)$ представляет собой функцию Гаусса фиксированной полуширины:

$$\varphi(z) = \Phi \exp\left(-\left(\frac{z - z_0}{\Delta z}\right)^2\right), \quad (26)$$

где z_0 и Δz — высота максимума и полуширина, Φ — максимальная амплитуда источника. Для исследования эффективности волновых источников с разными периодом и горизонтальной длинами в расчетах использованы постоянные значения $\Phi = 10^{-12} \text{ м}^{-2}$ и $\Delta z = 1 \text{ км}$.

Из рисунка видно, что зависимость от вертикальной длины волны и высоты источника носит сложный характер, который можно объяснить, если рассмотреть

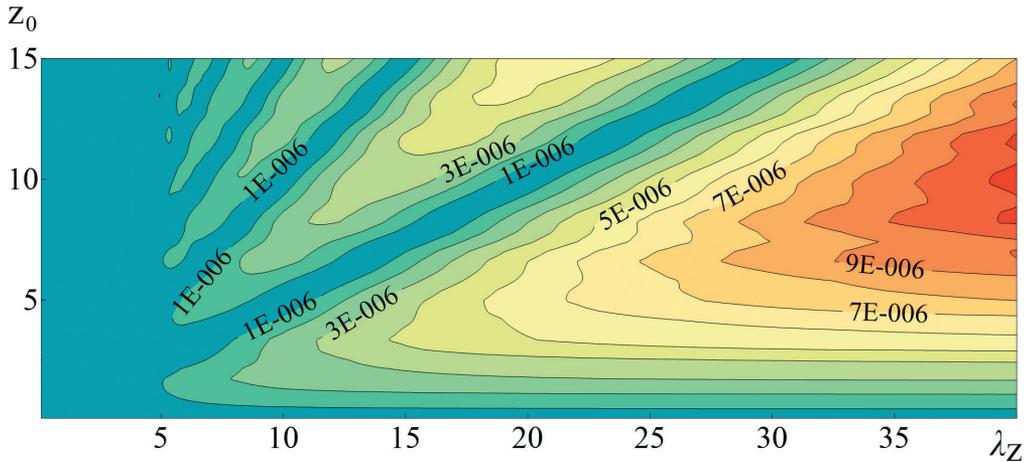


Рис. 1. Безразмерные амплитуды вертикальной скорости \tilde{w} на высоте 20 км в зависимости от вертикальной длины волны $\lambda_z = 2\pi / k_z$ и высоты максимума источника z_0 .

решение \tilde{w} на высотах выше максимума источника. В таком случае в выражении (23) останется только первое слагаемое в правой части:

$$\tilde{w}(z) = -\frac{e^{-ik_z z}}{k_z} \int_0^z \sin(k_z \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta. \quad (27)$$

Видно, что величина $\tilde{w}(z)$ с точностью до множителя является сверткой синуса с источником. При постоянстве фазы источника с высотой наибольшие значения \tilde{w} наблюдаются в случаях, когда максимумы источника близки к экстремальным значениям синусоиды, а наименьшие, когда максимум источника близок к узлу синусоиды. Из рис. 1 видно, что число максимумов \tilde{w} возрастает с увеличением высоты источника и уменьшением λ_z .

Для того чтобы пояснить закономерности распределения максимумов \tilde{w} , приведем рис. 2, на котором схематично изображено качественное поведение функций $\varphi(z)$ (источника, локализованного на высоте 10 км), $\sin(k_z z)$ и $\sin(k_z z)\varphi(z)$ для $\lambda_z = 8$ км (рис. 2 а) и $\lambda_z = 10$ км (рис. 2 б). При $\lambda_z = 8$ км максимум синусоиды и максимум источника совпадают, поэтому свертка величины $\sin(k_z z)\varphi(z)$ принимает бóльшие значения, чем в случае $\lambda_z = 10$ км, когда максимум источника совпадает с нулем синусоиды.

Дисперсионное уравнение (2) позволяет определить величину вертикального волнового числа k_z для заданных значений как функцию горизонтальной длины и периода. Затем можно вычислить вертикальную длину волны, значения которой для различных комбинаций периода и горизонтальной длины волны приведены в табл. 1. В случае отрицательных значений k_z^2 в таблице для λ_z ставится прочерк.

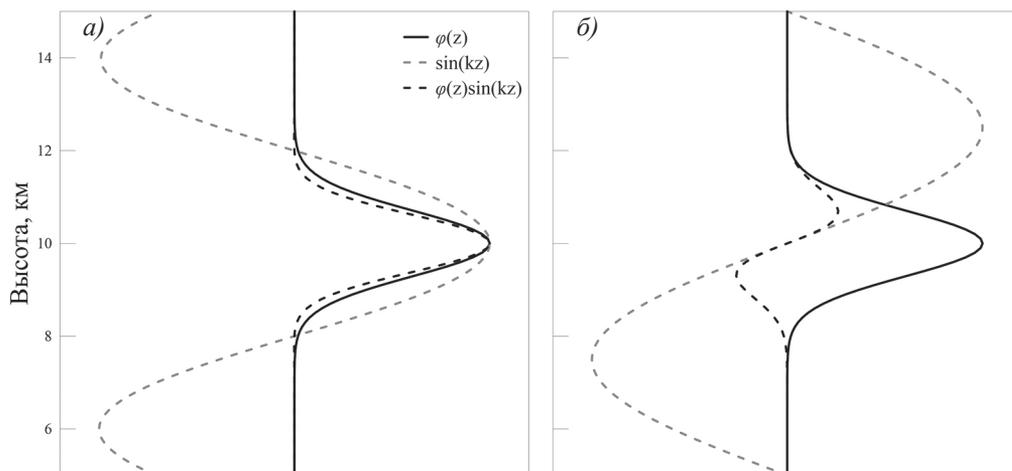


Рис. 2. Качественный характер поведения источника $\varphi(z)$, локализованного на высоте 10 км, $\sin(kz)$ и $\sin(kz)\varphi(z)$.

а) $\lambda_z = 8$ км, б) $\lambda_z = 10$ км.

Таблица 1

Вертикальная длина волны (км)
для различных значений периода (T) и горизонтальной длины волны (λ_x) ВГВ

| λ_x км | T мин | | | | | |
|----------------|---------|------|------|------|------|------|
| | 10 | 50 | 100 | 150 | 200 | 250 |
| 50 | 27,4 | 5,2 | 2,6 | 1,7 | 1,3 | 1,0 |
| 100 | 65,2 | 10,5 | 5,2 | 3,5 | 2,6 | 2,1 |
| 150 | 174,6 | 16,0 | 7,9 | 5,2 | 3,9 | 3,1 |
| 200 | — | 21,6 | 10,5 | 7,0 | 5,2 | 4,2 |
| 250 | — | 27,4 | 13,2 | 8,8 | 6,6 | 5,2 |
| 300 | — | 33,6 | 16,0 | 10,5 | 7,9 | 6,3 |
| 350 | — | 40,3 | 18,8 | 12,3 | 9,2 | 7,3 |
| 400 | — | 47,6 | 21,6 | 14,1 | 10,5 | 8,4 |
| 450 | — | 55,8 | 24,5 | 16,0 | 11,9 | 9,5 |
| 500 | — | 65,2 | 27,4 | 17,8 | 13,2 | 10,5 |
| 550 | — | 76,2 | 30,5 | 19,7 | 14,6 | 11,6 |
| 600 | — | 89,8 | 33,6 | 21,6 | 16,0 | 12,7 |

Использование значения k_z , полученного из уравнения (2), в (23) позволяет получить амплитуду ВГВ для разных значений высоты источника. Например, взяв четыре значения высоты источника (2, 5, 7 и 10 км), можно получить зависимость амплитуды ВГВ (см. выражения (23) и (27)) для разных значений высоты как функции периода и горизонтальной длины волны.

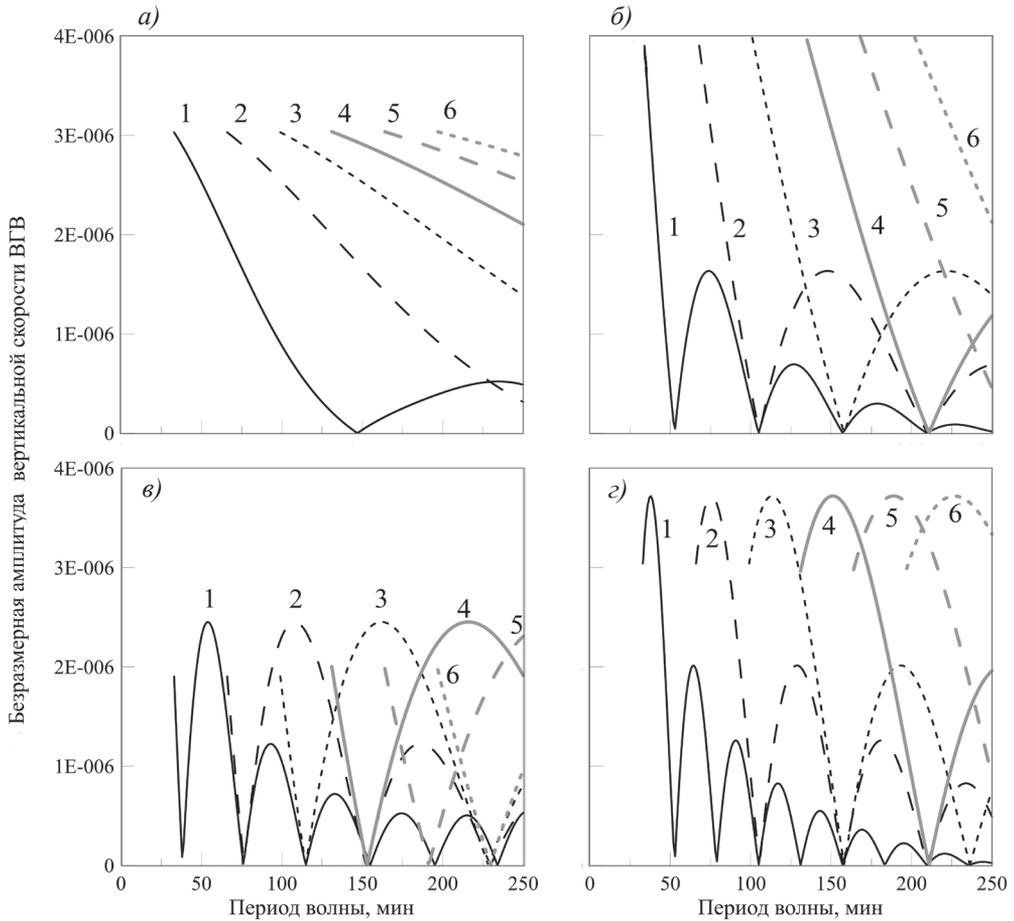


Рис. 3. Безразмерная амплитуда вертикальной скорости ВГВ на высоте 20 км для источника, локализованного на высоте 2 км (а), 5 км (б), 7 км (в) и 10 км (з) в зависимости от периода ВГВ для различных значений горизонтальной длины ВГВ (λ_x).

| | | | | | | |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Кривая | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| λ_x км. | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 |

На рис. 3 приведена безразмерная амплитуда \tilde{w} на высоте 20 км в зависимости от периода ВГВ при различных значениях λ_x . Видно, что рассчитанная амплитуда ВГВ зависит как от высоты источника, так и от характеристик волны (периода и горизонтальной длины волны). Это подтверждает приведенные ранее выводы о зависимости амплитуды ВГВ от соотношения между длиной волны и высотой источника. На рис. 3 при фиксированном λ_x амплитуда ВГВ на высоте 20 км увеличивается с уменьшением периода при всех рассмотренных значениях высоты максимума волнового источника.

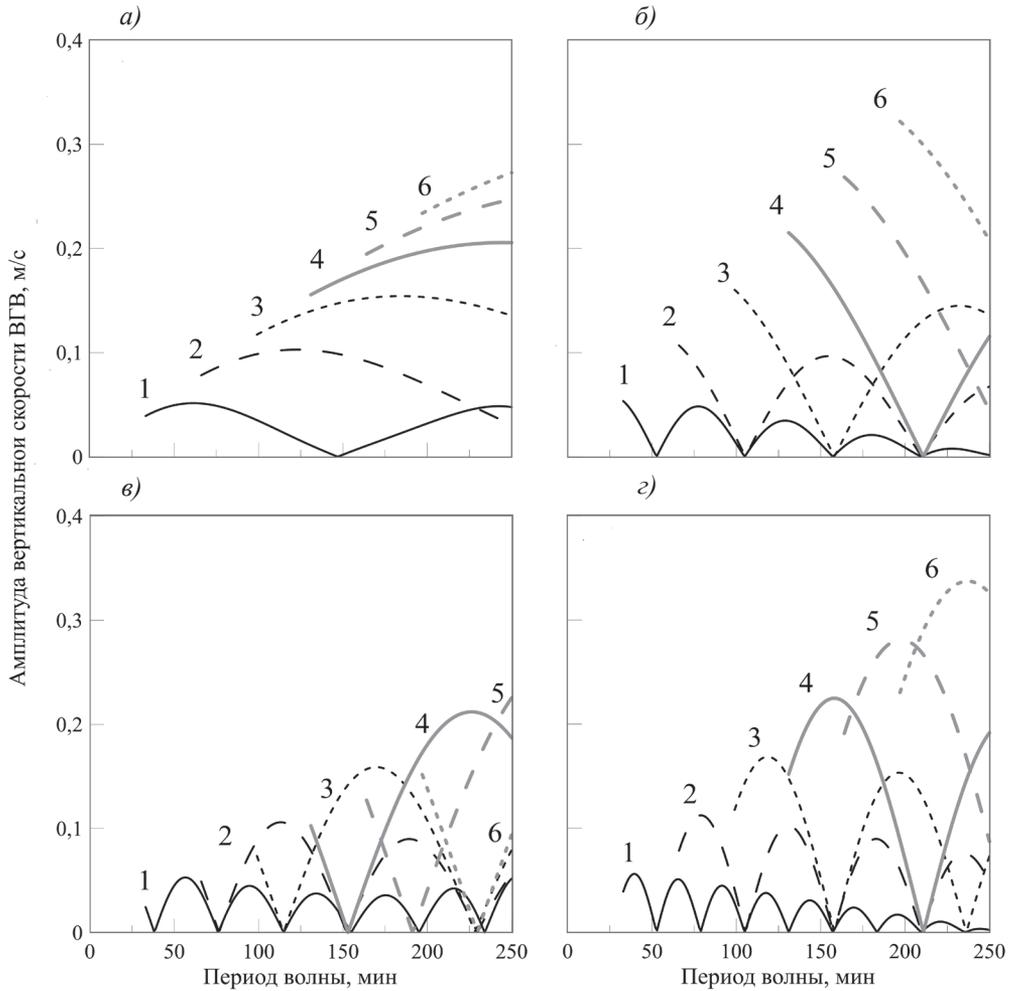


Рис. 4. Амплитуда размерной вертикальной скорости ВГВ на высоте 20 км для источника, локализованного на высоте 2 км (а), 5 км (б), 7 км (в) и 10 км (з) в зависимости от периода ВГВ для различных значений горизонтальной длины ВГВ (λ_x). Условные обозначения 1—6 см. рис. 3.

На рис. 1—3 анализируется безразмерная амплитуда вертикальной скорости \tilde{w} , входящая в уравнение (1). Для интерпретации атмосферных наблюдений более интересна размерная амплитуда вертикальной скорости

$$W(z) = g\tilde{w}(z)\exp(z/2H)/\omega. \quad (28)$$

На рис. 4 приведены результаты, аналогичные тем, что приведены на рис. 3, но для размерной амплитуды вертикальной скорости W на высоте 20 км. В целом

кривые на рис. 4 аналогичны соответствующим кривым на рис. 3, однако возрастание W с уменьшением периода волны происходит медленнее из-за наличия ω в знаменателе выражения (28).

Из рис. 1—4 видно, что при неизменных характеристиках источника большей эффективностью генерации обладают возмущения с большей длиной волны и меньшим периодом. Однако на рис. 1, 3 и 4 можно обнаружить комбинации периода и длины волн, при которых эффективность генерации незначительна. При фиксированной горизонтальной длине волны эффективность генерации ВГВ в среднем уменьшается при увеличении периода. Это можно объяснить тем, что при увеличении периода волны (как следует из формулы (2) и табл. 1) возрастает вертикальное волновое число (уменьшается вертикальная длина волны) и в соответствии с выражением (27) уменьшается значение $\tilde{\omega}$.

Заключение

В работе использована концепция функции Грина и методика расчета амплитуд ВГВ волновых источников, амплитуда которых является функцией высоты. В отличие от аналогичных предыдущих исследований на верхней границе используются условия излучения, дающие более физически оправданные результаты. Применение указанной методики при расчете амплитуды ВГВ позволяет оценить эффективность генерации ВГВ в зависимости от горизонтальной длины волны и периода.

Результаты расчетов показывают, что эффективность генерации при заданном периоде возрастает при увеличении горизонтальной длины волны. Большей эффективностью генерации обладают волны с большей вертикальной длиной. При фиксированной горизонтальной длине эффективность генерации ВГВ уменьшается при увеличении периода волны. Эти тенденции являются следствием соотношения между вертикальной длиной ВГВ (зависящей от горизонтальной длины волны) и высотой источника. Минимумы эффективности генерации соответствуют случаям, когда узел волны приходится на максимум в высотном распределении источника.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-05-01050.

Список литературы

1. Бидлингмайер Е.Р., Ивановский А.И., Погорельцев А.И. Формирование вертикальной структуры акустико-гравитационных волн процессами молекулярной вязкости и теплопроводности // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26, № 7. С. 682—692.
2. Бидлингмайер Е.Р., Погорельцев А.И. Численное моделирование трансформации акустико-гравитационных волн в температурные и вязкие волны в термосфере // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1992. Т. 28, № 1. С. 64—73.
3. Гаврилов, Н.М. Методические вопросы измерений динамических характеристик атмосферы. СПб: ВВМ, 2011. 102 с.
4. Гаврилов Н.М. Распространение внутренних гравитационных волн в стратифицированной атмосфере // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1985. Т. 21, № 9. С. 921—927.

5. Госсард Э.Э., Хук У.Х. Волны в атмосфере. М.: Мир, 1978. 532 с.
6. Дикий Л.А. Теория колебаний земной атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1969. 196 с.
7. Коваль А.В., Гаврилов Н.М. Параметризация воздействия орографических волн на общую циркуляцию средней и верхней атмосферы // Ученые записки РГТМУ. 2011. № 20. С. 71—75.
8. Кравченко И.Т. Теория волновых процессов. М.: URSS, 2011. 240 с.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1978. 736 с.
10. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982. 296 с.
11. Погорельцев А.И., Перцев Н.Н. Влияние фонового ветра на формирование структуры акустико-гравитационных волн в термосфере // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 1995. Т. 31, № 6. С. 755—760.
12. Dalin P., Pogoreltsev A., Pertsev N., Perminov V., Shevchuk N., Dubietis A., Zalcik M., Kulikov S., Zadorozhny A., Kudabayeva D., Solodovnik A., Salakhutdinov G., and Grigoryeva I. Evidence of the formation of noctilucent clouds due to propagation of an isolated gravity wave caused by a tropospheric occluded front // Geophys. Res. Lett. 2015, 42. P. 2037—2046. doi:10.1002/2014GL062776.
13. Dalin P., Gavrillov N., Pertsev N., Perminov V., Pogoreltsev A., Shevchuk N., Dubietis A., Völger P., Zalcik M., Ling A., Kulikov S., Zadorozhny A., Salakhutdinov G., and Grigoryeva I. A case study of long gravity wave crests in noctilucent clouds and their origin in the upper tropospheric jet stream // J. Geophys. Res. Atmospheres. 2016, 121. doi:10.1002/2016JD025422.
14. Chen C., Chu X., Zhao J., Roberts B., Yu Z., Fong W., Lu X. and Smith J. Lidar observations of persistent gravity waves with periods of 3–10h in the Antarctic middle and upper atmosphere at McMurdo (77.83°S, 166.67°E) // J. Geophys. Res. Space Physics. 2016, 121. P. 1483—1502.
15. Song I.-S., Lee C., Kim J.-H., Jeel G., Kim Y.-H., Choi H.-J., Chun H.-Y. and Kim Y. H., Meteor radar observations of vertically propagating low-frequency inertia-gravity waves near the southern polar mesopause region // J. Geophys. Res. Space Physics. 2017, 122. P. 4777—4800.
16. Huang K., Liu A., Zhang S., Yi F., Huang C., Gong Y., Gan Q., Zhang Y. and Wang Ru. Simultaneous upward and downward propagating inertia-gravity waves in the MLT observed at Andes Lidar Observatory // J. Geophys. Res. Atmospheres. 2017, 122. P. 2812—2830.